上級ミクロ経済学（前半）

京都大学経済研究所　森知也

平成 20 年 3 月 13 日

B.4　利潤最大化問題

B.4.1　利潤最大化問題と利潤関数

生産要素価格・生産物価格および固定生産要素投入量を所与としたときの利潤最大化問題、つまり、総収入 (すべての生産物について価格と産出量の積を足し合わせたもの）—total revenue—と総生産費用—total production cost—の差を最大化する産出ベクトル、および (可変) 生産要素の投入ベクトルを選択する問題

$$\pi(p, w, \overline{x}_f) \equiv \max_{x_v, y} \sum_{i=1}^{m} p_i y_i - \left\{ \sum_{i=1}^{k} w_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} w_i \bar{x}_i \right\} \tag{B.65}$$
$$s.t. \quad F(x_v, y; \bar{x}_f) = 0$$

を考える。また全ての生産要素の投入量が可変となる長期においては

$$\pi(p, w) \equiv \max_{x_v, y} \sum_{i=1}^{m} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \tag{B.66}$$
$$s.t. \quad F(x, y) = 0$$

と表される。関数 $\pi(\cdot)$ は利潤関数と呼ばれる。

利潤最大化問題のエッセンスを生産要素・生産物とも１種類の場合について図 B.31 を用いて考察する。

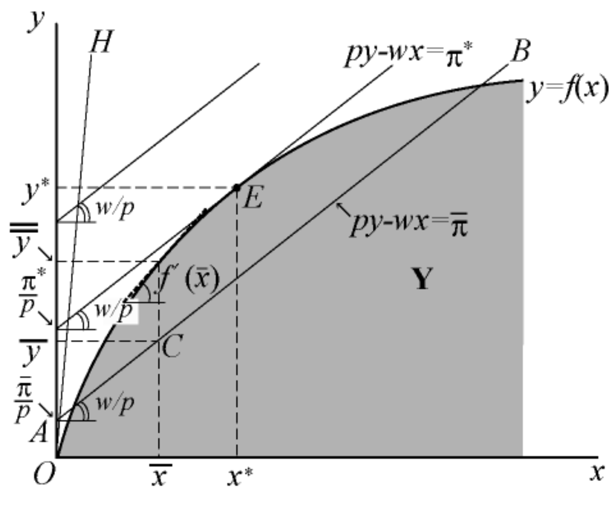

図 B.31: 利潤最大化問題 (１生産要素・１生産物)

1. 生産関数が生産要素の投入量に関して凹関数の場合を考える（影の領域が生産可能集合となる)。

2. いま、任意の実行可能な生産計画 $C = (\overline{x}, \overline{y})$ をとり、C を通り傾きが w/p である直線 ACB を考えると、この直線は、$\overline{\pi} = p\overline{y} - w\overline{x}$ として

$$py - wx = \overline{\pi} \tag{B.67}$$

を満たす、つまり C と同じ利潤 $\overline{\pi}$ を産むすべての生産計画 (x, y) の集合を表している。これを「等利潤曲線—iso-profit curve) と呼ぶ。より上方に位置する等利潤曲線ほど高い利潤に対応している。

3. 今、生産要素投入量 $\overline{x}$ の下での効率的な計画における産出量は $\overline{y}$ である。このとき、$\overline{x}$ における生産要素の限界生産性、つまり生産関数の傾き $f'(\overline{x})$ は、等利潤曲線の傾き w/p より大きいため、生産要素の限界生産性がその実質価格を上回る（$pMP(\overline{x}) > w$）。このことは、$\overline{x}$ より、投入量を増加させることにより利潤を増加できることを意味している。同様に、x^* 以上の投入量であれば、投入量を減少させることにより利潤を増加することができる。

4. 従って、最適な生産計画は等利潤曲線が生産関数に接している点 (E 点) であることが明らかになった。つまり、最適の１階条件は、

$$\frac{d}{dx} f(x^*) = \frac{w}{p} \tag{B.68}$$

で与えられ、２階条件は

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x^*) \leq 0 \tag{B.69}$$

で与えられる[41]。

注意 B.3 利潤関数は、生産技術が収穫非逓減であるとき、$\pi(p) \leq 0$、または、$\pi(p) = \infty$ となり、生産技術が収穫逓減の場合以外では有用な情報を与えない。その意味で、利潤関数による分析では、主として一部の固定的生産要素の存在のために収穫逓減を呈する短期の生産関数を想定すると考えるのが妥当である。

B.4.2 供給関数

(短期) 費用関数 (2.10）を用いれば、(生産物が一つの場合の) 利潤最大化問題 (B.65) は

$$\max_y py - C(y; w_v, w_f, \bar{x}_f) \tag{B.70}$$

となる。固定費用関数は産出量に依存しないため、問題 (B.70) と、最適化問題

$$\max_y py - C_v(y; w_v, \bar{x}_f) \tag{B.71}$$

の最適解は一致する。

事実 B.31 (利潤最大化の１階条件) 生産物価格 (限界収入—*marginal revenue*) は、(内点解が最適である限り) 常に限界費用と等しい。つまり、$(B.71)$ の１階条件として

$$\frac{\partial}{\partial y} C_v(y; w_v, \bar{x}_f) = p \tag{B.72}$$

が成立する。

[41] 複数生産要素の場合の１階条件は、

$$\frac{d}{dw_i} f(x^*) = \frac{w_i}{p}$$

２階条件 (B.69）はヘッセ行列—Hessian matrix

$$\mathbf{D}^2 f(x^*) = \{\partial^2 f(x^*)/\partial x_i \partial x_j\}$$

が半負値定符号—negative semidefinite—となることで与えられる（Varian[2, Sec.2.1] 参照)。

事実 B.32 (利潤最大化の２階条件) また、２階条件として最適産出量において

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} C_v(y; w_v, \bar{x}_f) > 0 \tag{B.73}$$

が成立する。つまり、限界費用曲線は右上がりになっている。

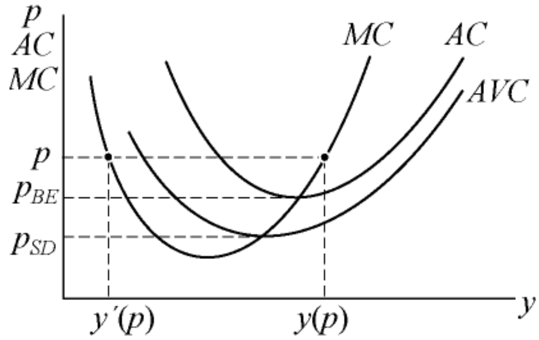

図 B.32: 利潤最大化の１・２階条件

利潤最大化の１・２階条件のエッセンスを図 B.32 を用いて以下の手順で幾何学的に理解できる。

1. U 字型の限界費用曲線を仮定する (生産関数が S 字型)。
2. 生産物価格 p の下で１階条件 (B.72) を満たす産出量は $y(p)$ と $y'(p)$ の２つがある。
3. ところが、$y'(p)$ は２階の条件を満たさないことが以下のように確認できる。産出量 $y \in (y'(p), y(p))$ においては、$p > MC(y)$(限界収入 > 限界費用）だから、産出量の増加により利潤を増加することができる。一方、$y < y'(p)$ または $y > y(p)$ は、$p < MC(y)$ となり、産出量を減少させることにより利潤を増加できる。端点 $y = 0$ においては固定費 C_f を回収できないため利潤は必ず負となるが、内点解 $y(p)$ では $p \geq p_{BE}$ である限り非負の利潤を得る。$p \geq p_{SD}$ ならば、収入は総可変費用を上回るため少なくとも固定費用の一部を回収できる。従って、$p \geq p_{SD}$ ならば内点解 $y(p)$、$p < p_{SD}$ なら端点解 $y = 0$ が最適となる。
4. つまり、利潤最大化解において産出量が正となるならば、生産は生産関数の収穫逓減部分で行われているはずである。

定義 B.26 (生産中止価格—shut-down price) 生産物価格 p が、限界費用曲線 $MC(y)$ と平均可変費用 $AVC(y)$ の交点 ($AVC(y)$ の最小点) で定義される価格 $p_{SD}(w_v, \bar{x}_f)$ を下回れば、如何なる生産量の下でも営業利益—*operating profit*—は負となり、生産中止 ($y^* = 0$) が最適となる。この価格は生産中止価格と呼ばれる[42]。

定義 B.27 (損益分岐価格—break-even price) 生産物価格 p が、限界費用曲線 $MC(y)$ と平均費用 $AC(y)$ の交点 ($AC(y)$ の最小点) で定義される価格 $p_{BE}(w_v, w_f, \bar{x}_f)$ より大きいとき (小さいとき)、最適生産量の下で利潤は正 (負) となり、価格 p_{BE} において利潤はゼロとなる。この価格は損益分岐価格と呼ばれる。

[42]固定費用のうち一部のみサンクしている (i.e., 回収不能) ならば、生産を中止することによりサンクしていない固定費用の支払いも中止することができる。従って、厳密な意味での生産中止価格は、可変費用とサンクでない固定費用の和についての平均費用曲線と限界費用曲線の交点で決まる。

定義 B.28 (供給関数—supply function) 従って、$y(p)$ を限界費用が平均可変費用を上回る部分についての限界費用関数 $MC(y)$ の産出量 y についての逆関数とすると、任意の生産価格 p の下で利潤を最大化する最適産出量 $s(p, w_v, \bar{x}_f)$ は以下のように表される[43]。

$$s(p, w_v, \bar{x}_f) = \begin{cases} 0 & \text{if } p < p_{SD} \\ \{0, y(p)\} & \text{if } p = p_{SD} \\ y(p) & \text{if } p > p_{SD} \end{cases} \tag{B.74}$$

事実 B.33 (供給曲線) (内点解が最適である限り) 供給曲線は右上がりになっている。

定義 B.29 ((無制約の) 要素需要関数—(unconstrained) factor demand function) 最適な産出量の下での制約付需要関数の値

$$d(p, w_v, w_f, \bar{x}_f) \equiv h(s(p, w_v, \bar{x}_f); w_v, \bar{x}_f) \tag{B.75}$$

は (無制約の) 要素需要関数と呼ばれる。

定義 B.30 (利潤関数—profit function) 最適な供給量 (産出量) の下で得られる最大の利潤は

$$\pi(p, w_v, w_f, \bar{x}_f) \equiv ps(p, w_v, \bar{x}_f) - C(s(p, w_v, \bar{x}_f); w_v, w_f, \bar{x}_f) \tag{B.76}$$

であり、これは利潤関数と呼ばれる。

B.4.3 利潤関数と要素需要関数の性質

以下の３つの利潤関数の性質（事実 B.34-B.36) は利潤関数の定義から直接導出されるもので、凸性や単調性等の仮定には依らない。これは、費用関数の価格に関する凹性と同様に、利潤関数は生産可能集合の凸包についての情報しか持たないことによる。

事実 B.34 (生産物・生産要素価格に対する反応) [44]利潤関数は生産物価格の非減少関数であり、生産要素価格の非増加関数である。つまり、$p' \geq p$ かつ全ての生産要素 i について $w'_i \leq w_i$ ならば、$\pi(p', w') \geq \pi(p, w)$。

事実 B.35 (価格に関する１次同次性) [45]利潤関数は、生産物価格 p と生産要素価格ベクトル w について１次同次である。つまり、任意の $t \geq 0$ について $\pi(tp, tw) = t\pi(p, w)$。

事実 B.36 (価格に関する凸関数) [46]利潤関数は、生産物価格 p と生産要素価格ベクトル w について凸関数である。つまり、任意の $t \in (0, 1)$ について、$(p'', w'') = t(p, w) + (1-t)(p', w')$ とすれば、$\pi(p'', w'') \leq t\pi(p, w) + (1-t)\pi(p', w')$。

事実 B.34・B.36 は、生産物・生産要素がそれぞれ１種類で、生産関数が凹関数である場合について、図 B.33 を用いて以下の手順で幾何学的に理解することができる。まず、費用関数の等費用断面としての要素価格フロンティアと同様に、利潤関数についても、その等利潤断面として生産財・要素価格フロンティアを定義することができる。

[43]利潤最大化問題で極大点が２つ存在するのは、限界費用曲線が U 字型 (生産関数が S 字型) をしているからである。もし、限界費用が常に逓増であれば (例えば、生産関数が強い凹関数の場合)、限界費用曲線と平均可変費用曲線が交わるのは、産出量がゼロのときだけであり、供給曲線のジャンプは生じない。つまり、内点解が存在すれば、それが最適解となる。
[44]証明は Varian[2, p.41] 参照。
[45]証明は Varian[2, p.41] 参照。
[46]証明は Varian[2, p.41] 参照。

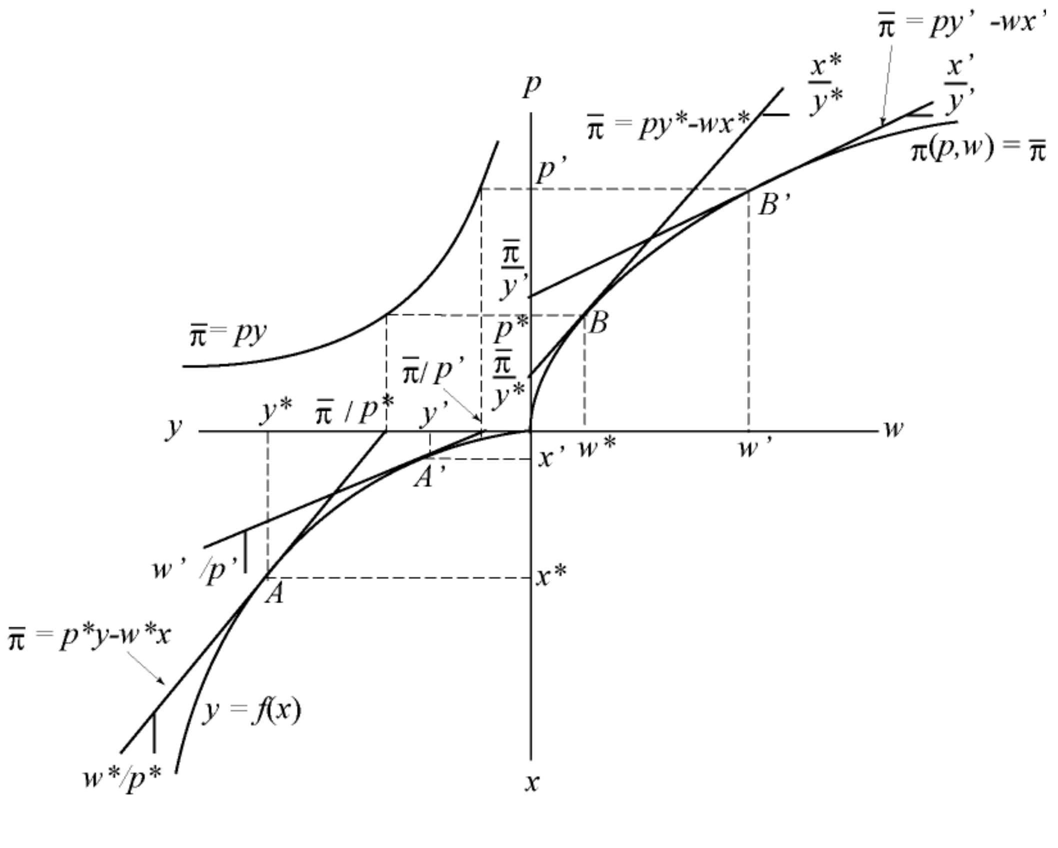

図 B.33: 生産関数と利潤関数

定義 B.31 (生産財・要素価格フロンティア) [47]利潤水準 $\bar{\pi}$ を所与としたときの、可変生産要素および生産財価格ベクトルの集合

$$\left\{(p,w) \in R_+^{m+k} | \pi(p,w) = \bar{\pi}\right\} \tag{B.77}$$

を生産財・要素価格フロンティアと呼ぶ。

1. 第３象限に生産関数 $y = f(x)$ を描く (横軸を産出量 y、縦軸を投入量 x)。
2. 利潤レベルを $\bar{\pi}$ に固定し、ある投入産出ベクトル点 $A = (x^*, y^*)$ が最適となるような価格ベクトル (w^*, p^*) を求め、等利潤線 $\bar{\pi} = p^*y - w^*x$ を第３象限に描く。この等利潤線は生産関数 $f(x)$ と点 A において接することに注意せよ。
3. 第１象限の横軸を生産要素価格 w、縦軸を生産物価格 p とし、点 $B = (w^*, p^*)$ と $(0, \bar{\pi}/y^*)$ を結ぶ、投入・産出ベクトル $A = (x^*, y^*)$ を所与とした価格平面での等利潤線 $\bar{\pi} = py^* - wx^*$ を描く。
4. 同様の手順で、利潤レベル $\bar{\pi}$ を所与として、第３象限の生産関数上の各点に対応する、投入・産出平面と価格平面における等利潤曲線を求める。例えば、生産点 $A' = (x', y')$ を通る量平面における等利潤線 $\bar{\pi} = p'y - w'x$ に対して、価格平面にはこの投入産出ベクトルを所与とした等利潤線 $\bar{\pi} = py' - wx'$ が描かれる。
5. 価格平面 (第１象限) において、投入・産出ベクトルを所与としたら、上方に位置する等利潤線ほど高い利潤に対応する。このことは、例えば、点 B は、投入・産出ベクトル A' を所与とした、点 B' を通る等利潤線 $\bar{\pi} = py' - wx'$ より下方に位置しており、価格 $B = (w^*, p^*)$ の下で生産点 A' は最適でないことを意味している。従って、もし、点 B が価格フロンティア上に位置するならば、点 B において価格フロンティアと接する等利潤線上にあり、価格フロンティアに接する他のどの等利潤線上にも、その上方にもないことを意味する。つまり、価格フロンティアは、これらの等利潤線の下方包絡線により表される。
6. 生産関数が凹関数であれば、価格フロンティアも要素価格 w に関して凹関数となる。上方に位置する価格フロンティアがより高い利潤レベルに対応することから、利潤関数が要素価格の減少関数であること、また生産物価格の増加関数であること、さらに価格に関して凸であることが従う（図 B.34 参照)。価格に関する１次同次性も容易に確認できる (← 試してみること！)。
7. なお、生産関数が非凸である場合については、利潤関数はその凸包に対応するものとなる（図 B.35 参照)。
8. また、価格フロンティア上の各価格ベクトル (w^*, p^*) は、これを所与としたときの利潤最大化の最適解 $(x^*, y^*, \bar{\pi})$ を所与とした双対問題

$$\min_{p,w} \pi(p,w) \tag{B.78}$$
$$s.t. \quad py^* - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^* = \bar{\pi}$$

の最適解として得られる。■

[47]「生産財・要素価格フロンティア」なる用語は、費用関数における要素価格フロンティアとの対応から便宜上本講義で採用しているが、一般的な用語ではないことに注意されたい。

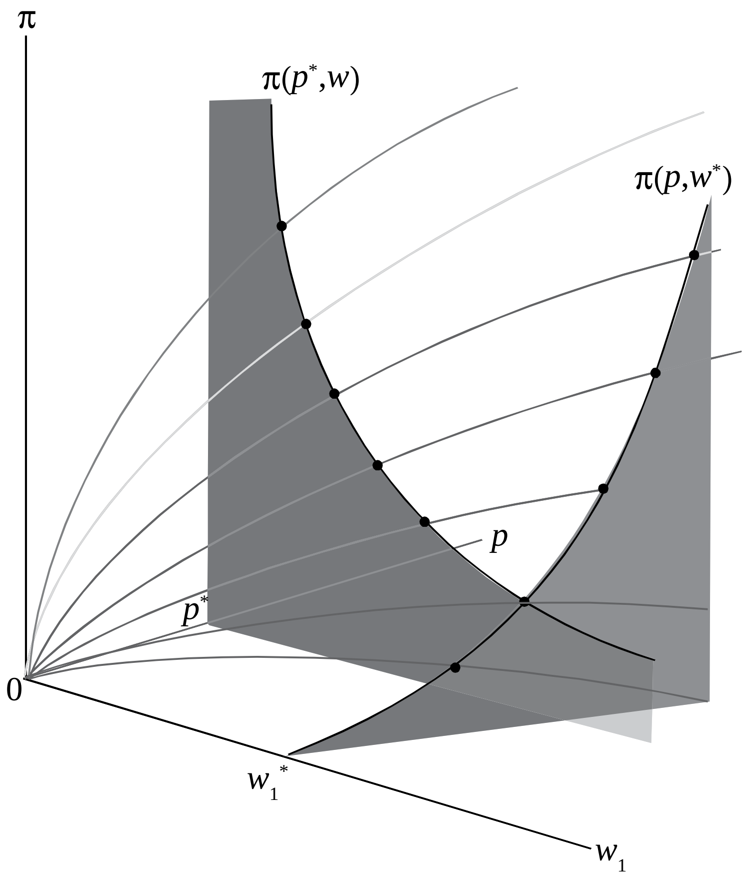

図 B.34: 利潤曲面

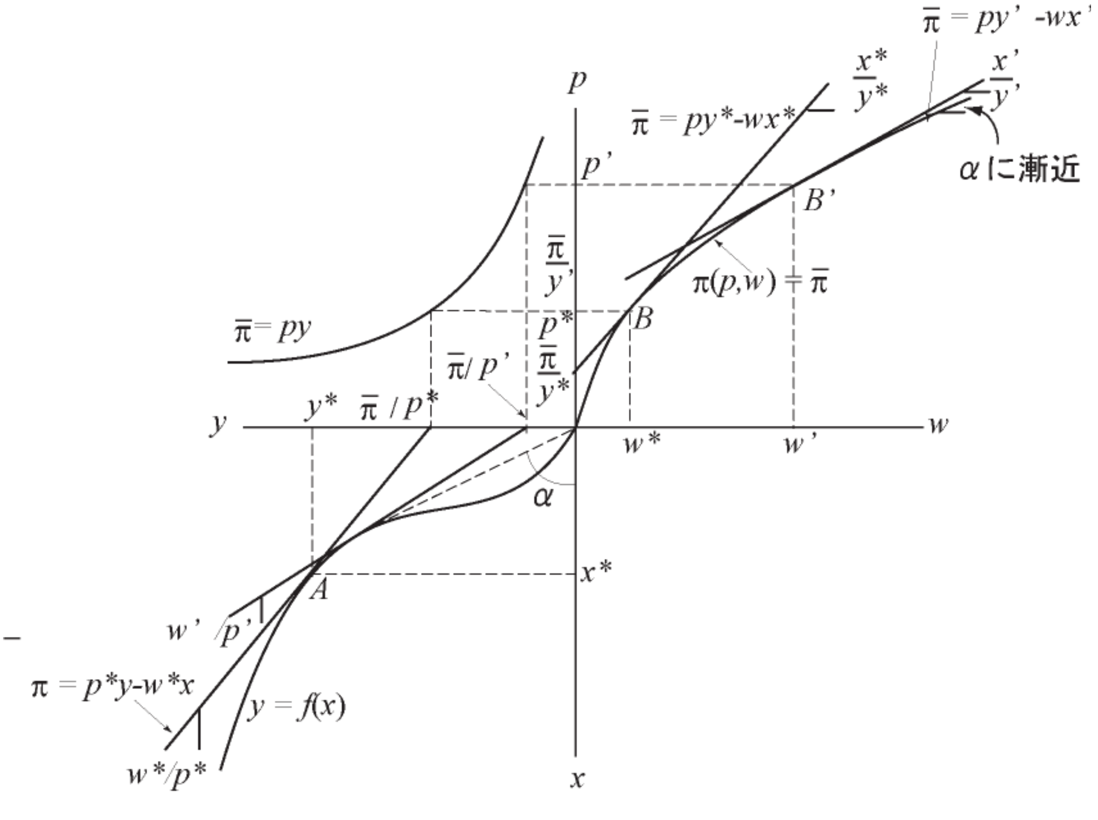

図 B.35: S字型生産関数と利潤関数

事実 B.37 (ホテリングの補題—Hotelling's lemma) [48]

$$\frac{\partial}{\partial p}\pi(p,w) = y^* \tag{B.79}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_i}\pi(p,w) = -x_i^* \tag{B.80}$$

証明. 利潤関数は

$$\pi(p,w) = ps(p,w) - C(s(p,w);w) \tag{B.81}$$

と表せるから、供給関数 $s(\cdot)$ の微分可能性を仮定すれば

$$\frac{\partial}{\partial p}\pi(p,w) = s(p,w) + \left\{p - \frac{\partial}{\partial y}C(y^*;w)\right\}\frac{\partial}{\partial p}s(p,w) \tag{B.82}$$

となる。しかし、内点解を仮定すれば第２項の括弧内はゼロであり、また $y^* = s(p,w)$ より、(B.79) を得る。同様に

$$\frac{\partial}{\partial w_i}\pi(p,w) = \left\{p - \frac{\partial}{\partial y}C(y^*;w)\right\}\frac{\partial}{\partial w_i}s(p,w) - \frac{\partial}{\partial w_i}C(y^*;w) \tag{B.83}$$

となる。しかし、内点解を仮定すれば第１項の括弧内はゼロであり、第２項にシェパードの補題を適用すれば（B.80）を得る。 □

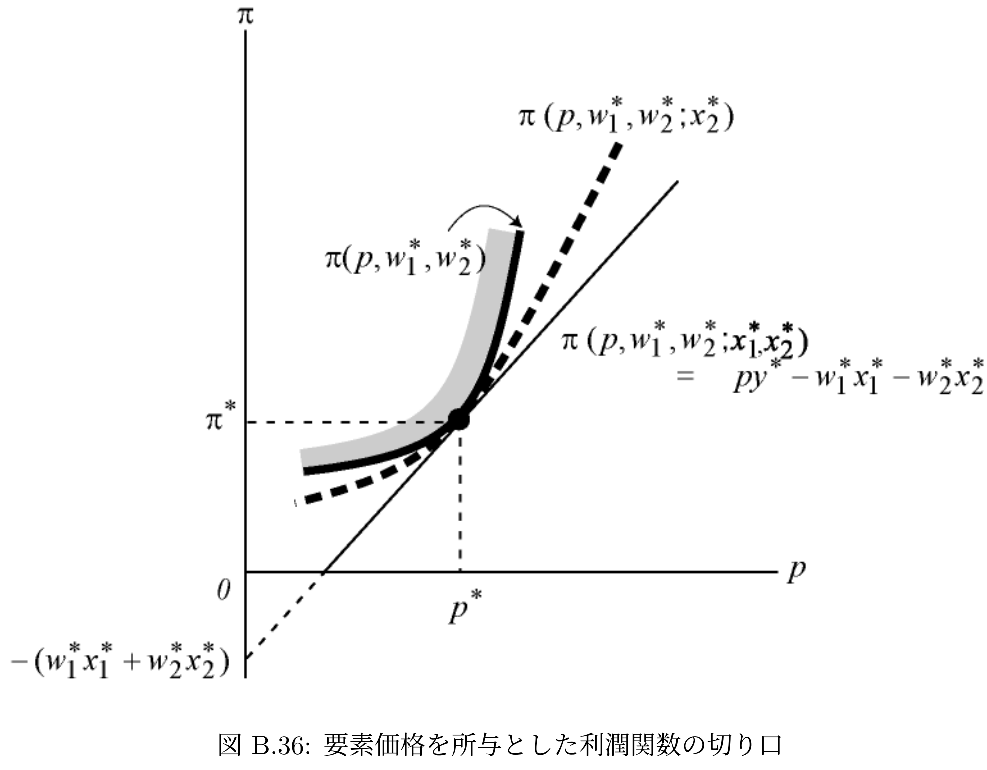

図 B.36: 要素価格を所与とした利潤関数の切り口

ホテリングの補題 (B.79）と (B.80) を用いて、長期と短期の利潤関数の関係についてさらに理解を深めることができる。生産要素は２種類とし、まず、（B.79）に関しては、図 B.34（図中 $w \equiv w_1$ とし w_2 軸は描かれていないとする）に描かれている利潤曲面の $w_1 = w_1^*$ における切り口である図 B.36 を見て以下の手順で考察する。

[48]ホテリングの補題は利潤最大化問題の双対問題（B.78）の最適１階条件である。

1. 要素価格ベクトル (w_1^*, w_2^*) を所与としたとき、長期利潤関数 $\pi(p, w_1^*, w_2^*)$ は生産物価格 p の凸関数（事実 B.36）かつ非減少（事実 B.34）であるから、図のような長期利潤曲線を描ける。

2. いま、価格ベクトル (p^*, w_1^*, w_2^*) にける長期利潤最大化解を (y^*, x_1^*, x_2^*) とすれば、生産物価格 p^* において長期利潤曲線と接する直線は
$$\pi = py^* - (w_1^* x_1^* + w_2^* x_2^*) \tag{B.84}$$
で、接点における利潤は長期最大化利潤 π^* である。この直線は全ての生産要素投入量が固定 $(x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*)$ である超短期の利潤関数 $\pi(p, w_1^*, w_2^*; x_1^*, x_2^*)$ とみなすことができる。

3. 同じ価格水準 p に対し、制約条件が少ない長期の方が利潤が高くなるのは明らかなので、第 2 要素のみが固定となる短期利潤関数を $\pi(p, w_1^*, w_2^*; x_2)$ とすると
$$\pi(p, w_1^*, w_2^*) \geq \pi(p, w_1^*, w_2^*; x_2^*) \geq \pi(p, w_1^*, w_2^*; x_1^*, x_2^*) \tag{B.85}$$
が成り立つ。このことから、利潤関数が微分可能であれば、長期・短期に関わらず、ホテリングの補題
$$\frac{\partial}{\partial p}\pi(p^*, w_1^*, w_2^*) = \frac{\partial}{\partial p}\pi(p^*, w_1^*, w_2^*; x_2^*) = \frac{\partial}{\partial p}\pi(p^*, w_1^*, w_2^*; x_1^*, x_2^*) \tag{B.86}$$
が成立する。■

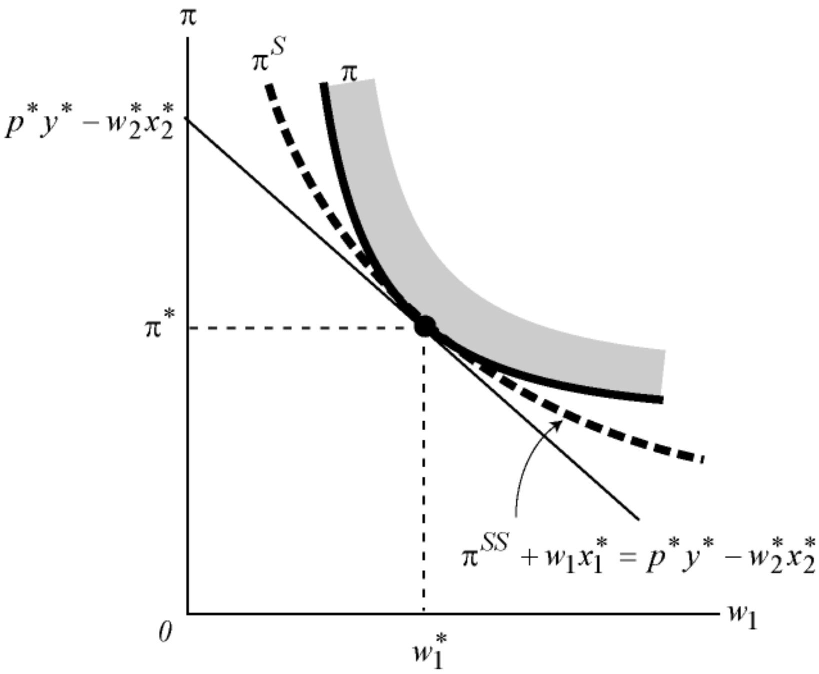

図 B.37: 生産要素価格に関する利潤関数の切り口

同様に、ホテリングの補題 (B.80）は、図 B.34 の利潤曲面の $p = p^*$ における切り口である図 B.37 を用いて幾何学的な理解ができる。ただし、利潤関数の要素価格 w_1 に関する切り口は図のように w_1 に関して非増となる (事実 B.34) 点は (B.79) の場合と異なる。

利潤関数が 2 階微分可能であるとき、利潤関数の価格に関する 1 次同次性（事実 B.35)、凸性 (事実 B.36)、およびホテリングの補題（事実 B.37）から、以下の結果を得る。[49]

[49]なお、(ii) の $D^2\pi(p, w)$ が半正値定符号であることは、利潤最大化問題の双対問題（B.78）の 2 階条件である。

事実 B.38 (要素需要関数と供給関数の価格効果) 利潤関数 π が (p,w) において *2* 階微分可能であれば、(i) $D^2\pi(p,w)\cdot(p,w)=0$[50]；(ii) $D^2\pi(p,w)$ は対称な半正値定符号行列—*symmetric and positive semidefinite matrix*—である。[51]特に、供給関数は生産物価格の非減少関数であり

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial p^2}=\frac{\partial}{\partial p}s(p,w)\geq 0 \tag{B.87}$$

要素需要関数の自己代替効果—*own substitution effect*—非正であり：

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial w_i^2}=\frac{\partial}{\partial w_i}d_i(p,w)\leq 0 \tag{B.88}$$

交叉代替効果—*cross substitution effect*—は対称である：

$$\frac{\partial}{\partial w_j}d_i(p,w)=\frac{\partial}{\partial w_i}d_j(p,w) \tag{B.89}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_j}s(p,w)=-\frac{\partial}{\partial p}d_j(p,w) \tag{B.90}$$

供給の法則ー *law of supply* ーおよび、要素需要の法則ー *law of factor demand* ーが成立する：

$$\begin{bmatrix} dp \\ dw \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} dy \\ d(-x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} dp \\ dw \end{bmatrix}\cdot D^2\pi(p,w)\begin{bmatrix} dp \\ dw \end{bmatrix}\geq 0 \tag{B.91}$$

証明（供給および要素需要の法則）. ホテリングの補題より、

$$D\pi(p,w)=\begin{bmatrix} y^* \\ -x^* \end{bmatrix}$$

よって

$$\begin{bmatrix} dy \\ d(-x) \end{bmatrix}=D^2\pi(p,w)\begin{bmatrix} dp \\ dw \end{bmatrix}$$

両辺に (dp,dw) をかければ、$D^2\pi(p,w)$ は半正値定符号であるから $(B.91)$ を得る。 □

事実 B.39 (ル・シャトリエ原理—The LeChatelier principle) 長期には財の供給および生産要素需要がより弾力的となる。

証明. 長期利潤関数を $\pi(p,w)$、短期利潤関数を $\pi(p,w_v,w_f;\overline{x}_f)$ と表し（ただし $w=(w_v,w_f)$)、いま、(p^*,w^*) の下での長期利潤最大化解を $x=(x_v^*,x_f^*)$ とし、関数

$$g(p,w)\equiv\pi(p,w)-\pi(p,w_v,w_f;x_f^*) \tag{B.92}$$

を定義すると

$$g(p,w)\geq g(p^*,w^*)=0 \tag{B.93}$$

であり $g(\cdot)$ は (p^*,w^*) において最小値 0 をとる。従って最小の１階条件より

$$\frac{\partial}{\partial p}g(p^*,w^*)=\frac{\partial}{\partial p}\pi(p^*,w^*)-\frac{\partial}{\partial p}\pi(p^*,w_v^*,w_f^*;x_f^*)=0 \tag{B.94}$$

また、短期供給関数を $s(p,w_v,w_f;\overline{x}_f)$ と表し、最小の２階条件にホテリングの補題を適用すれば

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}=\frac{\partial}{\partial p}s(p^*,w^*)-\frac{\partial}{\partial p}s(p^*,w_v^*,w_f^*;x_f^*)\geq 0 \tag{B.95}$$

[50]利潤関数が価格について１次同次であることから、その偏導関数である供給関数と要素需要関数は価格について０次同次であり、オイラーの定理により (i) を得る。所与の価格の下での供給量・要素需要量は、価格比のみに依存することを意味する。制約付要素需要関数に関する同様な性質について事実 B.23(i) を参照。

[51](ii) は $\pi(\cdot)$ が凸関数であることによる（e.g., 神谷・浦井 [4, 定理 7.3.8, p.284]）。また、これは、利潤最大化問題の双対問題（B.78）の２階条件でもある。

を得る。短期要素需要関数を $d(p, w_v, w_f, \overline{x}_f)$ と表せば同様にして

$$\frac{\partial}{\partial w_i} g(p^*, w^*) = \frac{\partial}{\partial w_i}\pi(p^*, w^*) - \frac{\partial}{\partial w_i}\pi(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*) = 0 \tag{B.96}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial w_i^2} = \frac{\partial}{\partial w_i} d_i(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*) - \frac{\partial}{\partial w_i} d_i(p^*, w^*) \geq 0 \tag{B.97}$$

を得る。 □

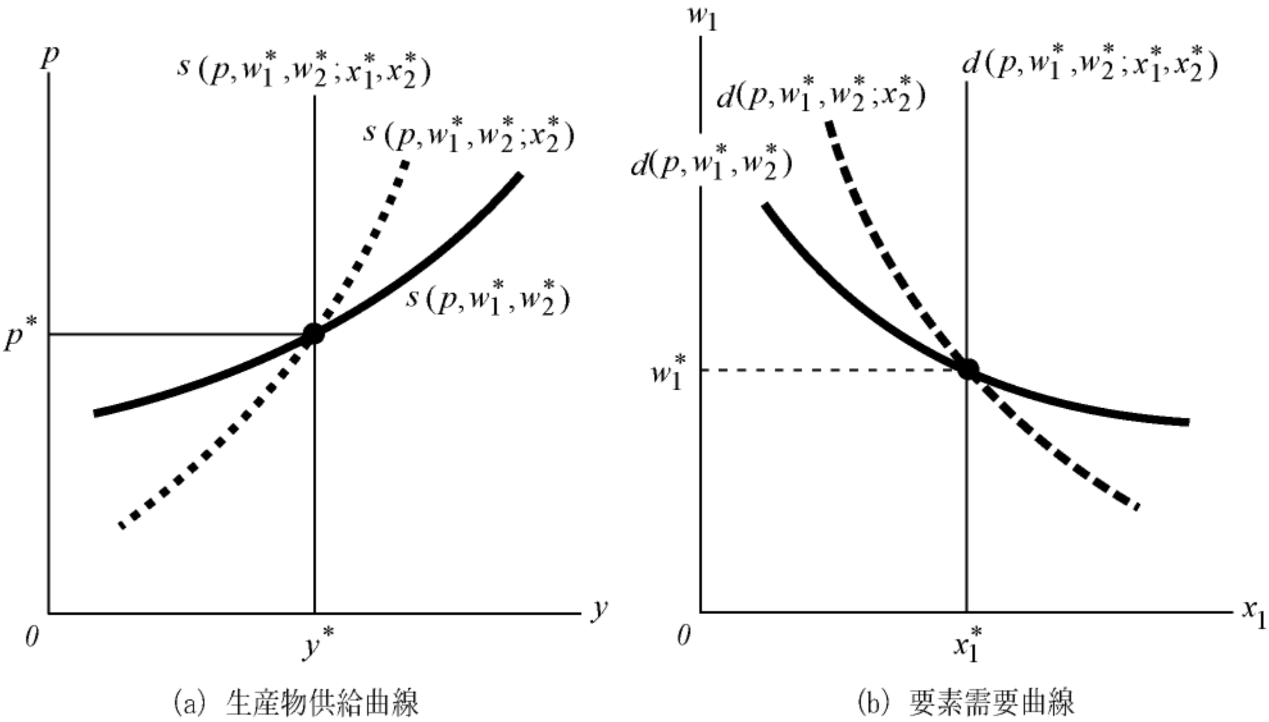

図 B.38: ル・シャトリエの原理

事実 B.37 の式 (B.79) の幾何学的説明に用いた図 B.36 の長期・短期・超短期利潤曲線に対応する供給曲線のグラフは図 B.38(a) のようになる。図 B.36 における長・短・超短期利潤曲線の位置関係から

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial p^2}\pi(p^*, w_1^*, w_2^*) &= \frac{\partial}{\partial p} s(p^*, w_1^*, w_2^*) \\
\geq \frac{\partial^2}{\partial p^2}\pi(p^*, w_1^*, w_2^*; x_2^*) &= \frac{\partial}{\partial p} s(p^*, w_1^*, w_2^*; x_2^*) \\
\geq \frac{\partial^2}{\partial p^2}\pi(p^*, w_1^*, w_2^*; x_1^*, x_2^*) &= \frac{\partial}{\partial p} s(p^*, w_1^*, w_2^*; x_1^*, x_2^*) = 0
\end{aligned}$$

が成立するのは明らかである。事実 B.37 の式 (B.80）についても図 B.37・B.38(b) を用いて同様に説明できる。

事実 B.40 (要素需要関数の価格効果の分解)

$$\frac{\partial d_i}{\partial w_j} = \frac{\partial h_i}{\partial w_j} - \frac{\partial h_i}{\partial y}\frac{\partial h_j}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial p} \tag{B.98}$$

と表せ、右辺第 1 項は「代替効果—*substitution effect*」と呼ばれ、もし $i = j$ ならば事実 *B.23(ii)* より非正となり、$i \neq j$ なら i と j が代替的なら正、補完的なら負となる。一方、第 2 項は「産出量効果—*expansion* *effect/scale effect*」と呼ばれ、この項を構成する３つのうち最初の２つはそれぞれの生産要素が正常要素なら正、下級要素なら負となり[52]、最後の成分は $(B.87)$ より非負となる。

証明.

$$d_i(p,w) = h_i(s(p,w);w)$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial w_j} d_i(p,w) = \frac{\partial}{\partial w_j} h_i(y^*,w) + \frac{\partial}{\partial y} h_i(y^*,w) \frac{\partial}{\partial w_j} s(p,w) \tag{B.99}$$

を得る。（B.90）より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_j} s(p,w) &= -\frac{\partial}{\partial p} d_j(p,w) \\
&= -\frac{\partial}{\partial p} h_i(s(p,w);w) \\
&= -\frac{\partial}{\partial y} h_i(y^*,w) \frac{\partial}{\partial p} s(p,w)
\end{aligned}$$

が成り立ち (B.98）を得る。 □

従って、(B.88）より、当該要素価格の上昇は、その要素が正常か下級かに関わらず常にその要素需要を減少させる（または一定に保つ) が、別の要素価格の上昇は、当該要素と価格が上昇した要素がそれぞれ正常か否か、およびこれら２つの要素が代替的か否かに依存する。以下では、当該要素が正常財であり、２つの要素が代替的である場合については、図 B.39 を用いて、（B.99）の分解を以下の手順で理解できる。

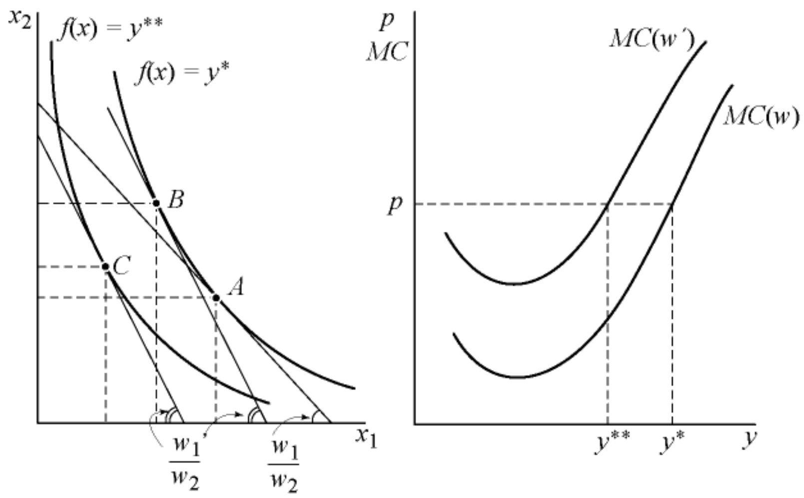

図 B.39: 要素需要の価格変化伴う代替効果と拡張効果

1. 生産要素数を２とし、生産物価格 p、生産要素価格 $w = (w_1, w_2)$ の下での最適産出量を $y^* = s(p,w)$、最適要素需要を $x^* = (x_1^*, x_2^*) = d(p,w)$ と表すと、x^* は左図点 A に対応し、この点において技術的限界代替率と相対価格が一致する。
2. また、右図に示されるように、最適産出量は限界費用曲線を所与として、価格と限界費用が等しくなる点で決まっている。

[52]正常・下級生産要素については、講義ノート「費用最小化問題」の脚注 23 を参照。

3. 今、第 1 要素価格 w_1 が w_1' に上昇したとする。このとき左図において 2 つの変化がある。第 1 に、等費用曲線の傾きが急になる。産出量を y^* に保った要素価格のみの変化に伴う (制約付) 要素需要の変化「代替効果—（B.98）の第 1 項」は、等量曲線上の点 A から点 B への移動により表される。

4. 第 2 の変化は、第 1 要素価格の変化による限界費用の変化に伴う最適産出量の変化、つまり等量曲線のシフトに伴うものである。シェパードの補題を用いて

$$\frac{\partial^2 C}{\partial w_i \partial y} = \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial w_i} = \frac{\partial}{\partial y} h_i(y; w) \tag{B.100}$$

を得れば、第 1 要素価格の上昇は、第 1 要素が正常要素であるとき限界費用曲線を上方にシフトさせ、下級要素であるとき下方にシフトさせることが解る（右図参照）。従って、第 1 要素が正常要素ならば最適産出量は減少し ($\partial s(p,w)/\partial w_1 < 0$)、下級要素ならば増加する ($\partial s(p,w)/\partial w_1 > 0$)。

5. 第 1 要素が正常要素であるとして、最適産出量が y^{**} に減少するとしよう (右図参照)。すると、産出量 y^{**} に対応する等量曲線は y^* に対応するものより原点よりとなる（左図参照)。この第 2 の変化は、「産出量効果—(B.98) 第 2 項」であり、左図において産出量 y^* の下での等量曲線上点 B から、産出量 y^{**} の下での等量曲線と、傾き $-w_1'/w_2$ の等費用曲線とが接する点 C への変化により表される。

B.4.4 利潤・供給関数の集計

定義 B.32 (集計供給関数ー aggregate supply function) [53,54]経済には J 個の企業が存在し、それらの生産可能集合が $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_J$ で表され、各 $\mathbf{Y}_j$ は非空な閉集合で、無償廃棄可能とする。各生産可能集合 $\mathbf{Y}_j$ に対する供給・要素需要関数を $y_j(p)$ としたとき、集計的供給関数

$$y(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j(p) = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^L : \text{ある } y_j \in y_j(p), j = 1, \dots, J \text{ について } y = \textstyle\sum_j y_j \right\} \tag{B.101}$$

により定義する。

事実 B.41 (集計供給に関する供給の法則ー law of supply in aggregate) [55]$Dy(p)$ は対称な半正値定符号行列であり、これより、集計的供給についても供給の法則が成立する：

$$dp \cdot dy \, (= dp \cdot Dy(p) dp) \geq 0 \tag{B.102}$$

定義 B.33 (集計生産可能集合ー aggregate production possibility set)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \cdots + \mathbf{Y}_J = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^L : \text{ある } y_j \in \mathbf{Y}_j, \quad j = 1, \dots, J \text{ について } y = \textstyle\sum_j y_j \right\} \tag{B.103}$$

事実 B.42 (利潤・供給関数の集計ー aggregate profit/supply function) [56]任意の $p \gg 0$ について、集計生産可能集合 $\mathbf{Y}$ に対する利潤関数および供給関数、$\pi^*(p), y^*(p)$ は、個々の企業 $j = 1, \dots, J$ の個別の利潤最大化から得られる利潤関数と供給関数の和で与えられる (図 *B.40* 参照)：

$$\pi^*(p) = \textstyle\sum_j \pi_j(p) \tag{B.104}$$

$$y^*(p) = \textstyle\sum_j y_j(p) \tag{B.105}$$

---

[53]MWG[1, §5.E, p.147] 参照

[54]本節では、表記の単純化のため、生産財価格 p および生産要素価格 w を、ベクトル p として表し、供給関数および要素需要関数を $y(p) \equiv (s(p), -d(p))$ と表す。また、生産財数と生産要素数の合計を $L = m + n$ と表す。

[55]MWG [1, §5.E, p.147]

[56]MWG[1, Prop.5E1, p.148]

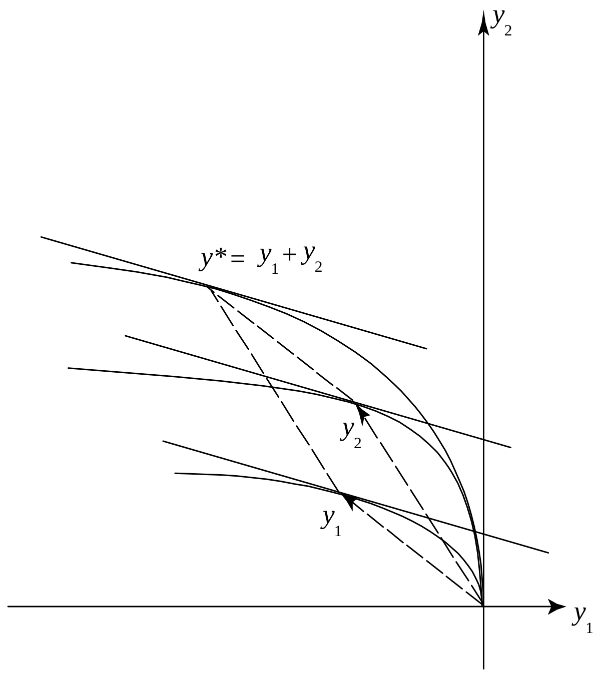

図 B.40: 集計生産可能集合と集計供給関数

B.4.5 完全競争企業の長期的な振る舞い

[57]完全競争企業の長期的な振る舞いには、主として２つの要素がある。第１に、市場への参入と退出である。利潤が負であれば、最終的には退出を余儀なくされるし、既存企業の利潤が正であれば、それは新たな企業の市場への参入を促す。特に、参入と退出が自由に行われるのであれば、同じ生産技術を持つ企業は同じ利潤を得ることになる。第２の要素は、短期では固定的であった生産要素投入量の調整を行うことである。特に、究極的な状況として、長期において生産技術が収穫一定を呈すると考える場合がある。以下では、集計需要関数 $D(p)$ が価格 p の減少関数として与えられるとして、各企業が同一な生産技術を持つ場合に関して、生産技術が基本的な各形状（収穫一定・収穫逓減・Ｓ字型）のもとで、完全競争市場における企業の長期的な振る舞いを考察する。以下、企業数を所与としたときに、集計需要量と産業の供給量が一致するように価格が決まっている状態を短期均衡、自由参入・退出が可能としたとき、集計需要量と産業の供給量が一致し、企業が新規の参入・退出のインセンティブを持たないように価格が決まっている状態を長期均衡と呼ぶ。

収穫一定

収穫一定の生産技術の下では、平均費用は一定であるため、価格が所与ならば、供給量と利潤は比例する。市場価格が平均費用を上回る限り単位生産量当たりの利潤は正であり、生産を拡大すれば際限なく利潤を増加させることが可能となる。ところが、図 B.41 のような右下がりの集計需要関数 $D(p)$ が与えられると、そのような価格では超過供給となり、市場価格は下落する。一方、価格が平均費用を下回る場合、いかなる供給量においても利潤は負となり、供給は起こらず超過需要が発生し市場価格は上昇する。従って、収穫一定においては、均衡においてはゼロ利潤のみ実現可能となる。特に、収穫一定の場合は企業数は不定であり意味を持たない。

収穫逓減

[57]Varian[3, pp.85-90] 参照

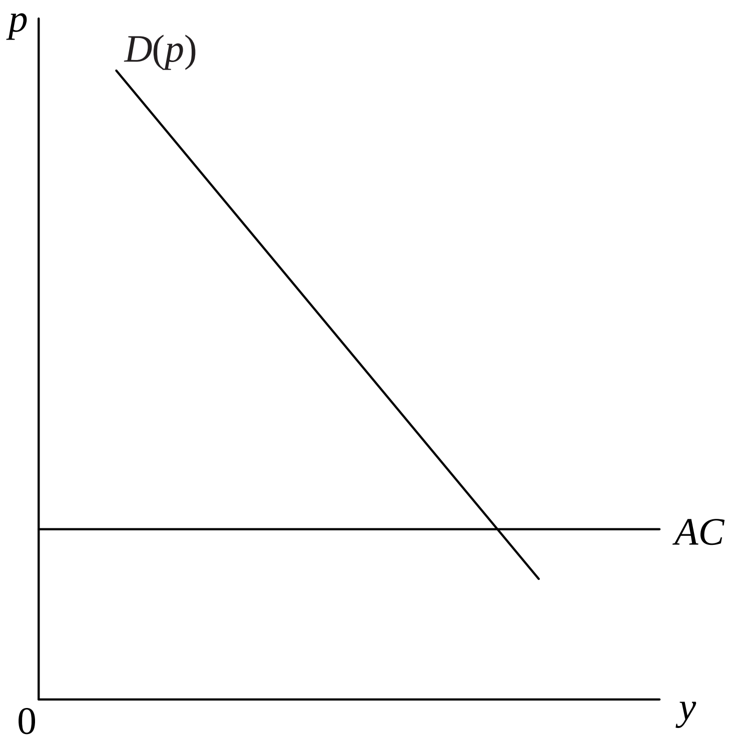

図 B.41: 収穫一定と完全市場均衡

限界費用は常に増加し、企業数が固定の場合、所与の価格の元で企業は正の利潤を得る[58]。例えば、費用関数が

$$C(y) = y^2 \tag{B.106}$$

で与えられる場合を考えると、平均費用関数および限界費用関数は

$$AC(y) = y \tag{B.107}$$

$$MC(y) = 2y \tag{B.108}$$

となり、企業の供給関数は

$$y(p) = \frac{1}{2}p \tag{B.109}$$

企業数を n とすると、産業の供給関数は

$$Y(p;n) = ny(p) = \frac{n}{2}p \tag{B.110}$$

となる。企業数 n が所与であれば、$Y(p;n)$ と $D(p)$ の交点で価格および各企業の産出量は決まり、利潤は正となる。図 B.42 は、集計需要曲線と、産業の供給曲線を各企業数 $n = 1, 2, \ldots$ について描いたものである。図に示すように、右下がりの需要関数 $D(p)$ の下では、企業数が増えるに従って、各企業の供給量は減少する。そして、自由参入が可能であれば、式（B.107）の場合のように、生産規模が小さくすれば平均費用は限りなくゼロに近づくため、均衡において正の価格が実現しない。同時に、企業数は限りなく増加し、各企業の生産量は限りなくゼロに近づく。従って、収穫逓減技術の下で参入・退出が自由である場合は完全競争と整合しない。

[58]土地量が長期的にも限られている農業などが当てはまる。土地の投入量が自由に可変である場合に収穫一定であったとしても、土地が希少財である場合には収穫逓減を呈する。このとき、土地所有者と農業生産者を分けて考えれば、土地単位当たりの利潤は、土地に対する最高付値であり、農業生産者が多数存在する場合には、まさにこれが市場地代となる。従って、農業企業自体の利潤はゼロと考えることが出来る。

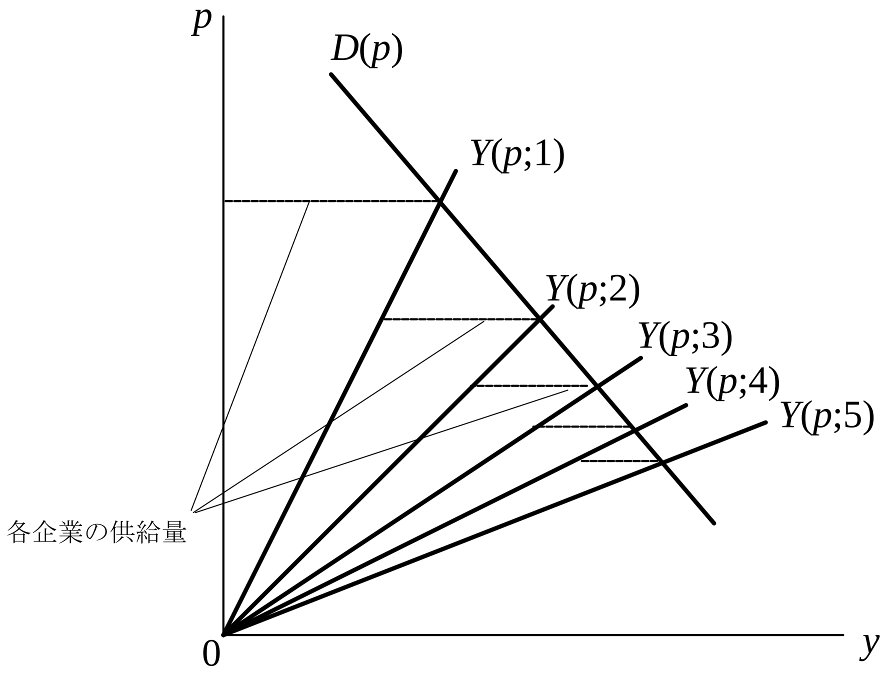

図 B.42: 収穫逓減技術と完全市場均衡

U字型生産技術

この場合、収穫逓減技術の場合と異なり、平均費用は正の最小値を持ち、企業の参入に伴って均衡価格は下落するものの、価格は最小平均費用の水準を下回ることはない。従って、長期均衡においては、既存の企業に非負の利潤があり、かつ、更に新規参入があれば利潤が負に転ずる状況となる。費用関数が

$$C(y) = y^2 + 1 \tag{B.111}$$

で与えられる具体的な場合を考えてみよう。平均費用関数は

$$AC(y) = y + \frac{1}{y} \tag{B.112}$$

であり、$y^* = 1$ において最小値 2 をとる。限界費用関数、各企業の供給関数、および、産業の供給関数は、それぞれ、(B.108)、(B.109)、および、(B.110) で与えられる。図 B.43 は、集計需要曲線と、産業の供給曲線を各企業数 $n = 1, 2, \ldots$ について描いたものである。企業数 n が所与である（短期の）とき、価格は企業数 n の下での産業の供給曲線と需要曲線の交点で決まる。自由参入が可能なとき、企業の参入に伴う産業の供給曲線の変化は不連続で、各企業数 n 所与の下での産業の供給曲線の太線部分で示されている。自由参入・退出が可能な（長期の）場合、非負利潤の下で最小となる短期（企業数所与の）均衡価格が長期均衡価格となる。図の例では、均衡での企業数は 5 である。

B.4.6　独占企業の利潤最大化問題

[59] ここまで考察してきた「利潤最大化問題」は、価格を所与とした下で、つまり、企業数が多数で、個々の企業が市場価格に影響力を持たず、企業が価格を受容する場合の利潤最大化問題であった。本節では、その対極にある場合で、財の供給が単一の企業によって行われる独占市場における企業の利潤最大化問題を

[59] Varian[2, pp.233-235] 参照

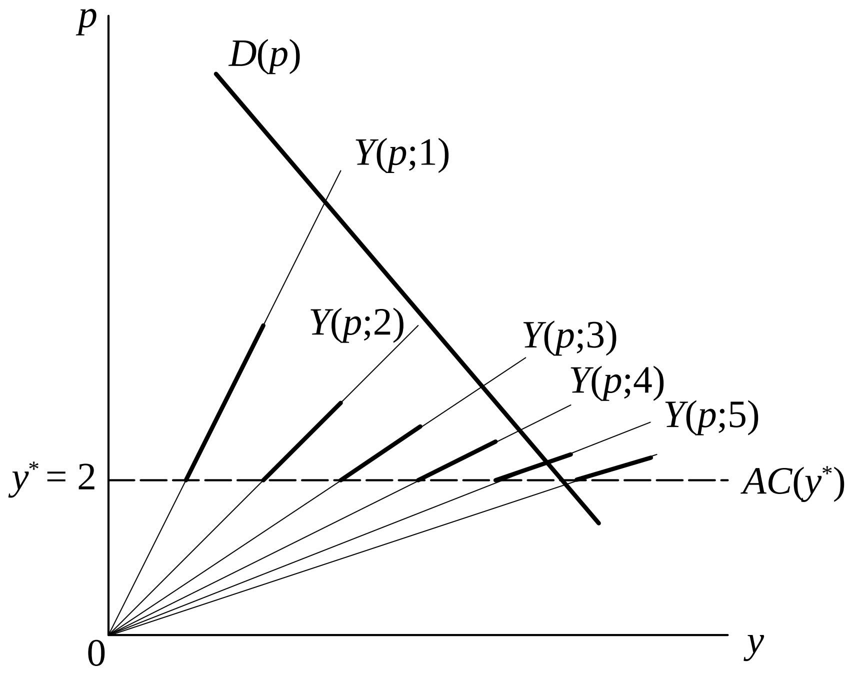

図 B.43: U字型生産関数と完全市場均衡

考える。このとき、利潤最大化問題において、企業は、生産財の産出量 (供給量) のみならず、価格も決定する必要がある。

今、生産財の価格 p と需要 y の関係が、需要関数 $y(p)$ として表されるとしよう。しばしば用いられる表現として、逆需要関数（需要関数の逆関数)$p(y) \equiv y^{-1}(p)$ を定義すると、企業の利潤最大化問題は

$$\max_{y} p(y)y - C(y;w) \tag{B.113}$$

となる。目的関数の第１項 $p(y)y$ は収益ー revenue ーであり、第２項は費用（関数）である。最適産出量 y^* において（内点解を仮定すれば) １階条件および２階条件は

$$p(y^*) + p'(y^*)y^* = C'(y^*) \tag{B.114}$$

$$2p'(y^*) + p''(y^*)y - C''(y^*) \leq 0 \tag{B.115}$$

となる。１階条件の左辺は供給の限界収入ー marginal revenue of supply/output ー、右辺は限界費用である。この１階条件は以下のように解釈できる。供給を dy だけ増やせば、第１の効果として、供給の増加に伴う収入の増加があり、これが左辺第 1 項 $p(y^*)$ に供給の増分 dy をかけた $p(y^*)dy$ として現される。一方、供給量を dy 分増やすためには価格を $p'(y^*)dy$ だけ下げる必要があり、この価格の低下は追加的な供給分だけでなく、供給する各単位に対して起こるため、価格低下に伴う収入の減少は、第 2 項 $p'(y^*)y^*dy$ で表される。これら２つの効果の和が限界収入であり、これが限界費用と等しくなる供給量が最適供給量となる。

２階条件 (B.115) は、最適供給量 y^* において、限界費用曲線の傾きが、限界収入曲線の傾きを上回ること、つまり、限界費用曲線が限界収入曲線の下側から交わることを要求している。

式（B.114）を、需要の価格弾力性ー price elasticity of demand

$$\epsilon(y) = -\frac{p}{y(p)}\frac{dy(p)}{dp} \tag{B.116}$$

を用いて書き直すと

$$p(y^*)\left[1-\frac{1}{\epsilon(y^*)}\right]=C'(y^*) \tag{B.117}$$

となり、独占価格は限界費用のマークアップとして

$$p(y^*)=\frac{1}{1-1/\epsilon(y^*)}C'(y^*) \tag{B.118}$$

と表され、マークアップ率は需要の価格弾力性の関数

$$\frac{1}{1-1/\epsilon(y^*)} \tag{B.119}$$

で与えられる。

図 B.44 は、以下のような線形の逆需要関数とU字型の平均費用関数の下での独占企業の利潤最大化問題を示している。

$$p(y)=12-y \tag{B.120}$$

$$C(y)=y^2+1 \tag{B.121}$$

このとき限界収入関数、限界費用関数、および、平均費用関数は

$$R'(y)=12-2y \tag{B.122}$$

$$C'(y)=2y \tag{B.123}$$

$$AC(y)=C(y)/y=y+\frac{1}{y} \tag{B.124}$$

となる。限界収入関数 $R'(y)$ は、逆需要関数 $p(y)$ と縦軸（価格軸) 切片が同じで、傾きが 2 倍となっている。最適産出量は、$R'(y^*)=C'(y^*)$ となる

$$y^*=3 \tag{B.125}$$

で与えられ、企業は価格 $p(3)=9$ で生産財を売り、収入 $R(3)=6$ を得る。平均費用は $AC(3)=\frac{10}{3}$ なので、利潤は図 B.44 の影部分で、$(p(3)-AC(3))\times 3=17$ となる。

独占力の源泉は、なんらかの参入障壁の存在による（e.g., 法的障壁、企業が保持する特許、企業固有の文書化不可能な技術・知識等)。このような場合、独占企業は次の 2 つの役割を持つ、つまり、企業は（特許等)、企業固有の生産資源の所有者であるとともに、その生産資源を含む生産要素を用いて実際に生産活動を行うと考えることができる。このとき、企業の独占利潤は、企業固有の生産資源に対する最高付値としての独占レントー monopoly rent ーと解釈することができる。

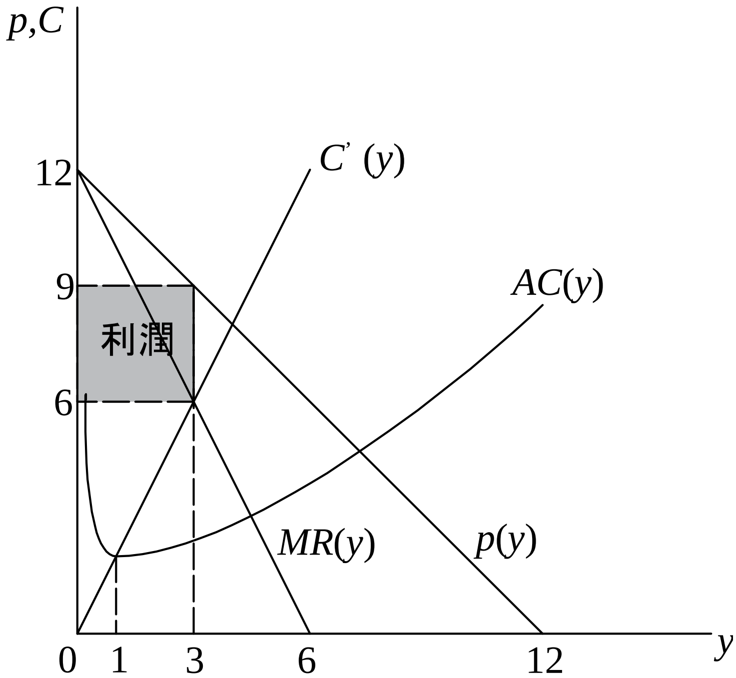

図 B.44: 独占企業の利潤最大化

参考文献

[1] Mas-Colell, A., Whinston, M.D., Green, J.R., *Microeconomic Theory*, Oxford: Oxford University Press (1995)

[2] Varian, H.R., *Microeconomic Analysis*, 3rd ed., New York: Norton (1992)

[3] Varian, H.R., *Microeconomic Analysis*, 2nd ed., New York: Norton (1984)

[4] 神谷和也・浦井憲, 「経済学のための数学入門」, 東京大学出版会 (1996)