上級ミクロ経済学（前半）

京都大学経済研究所　森知也

平成 20 年 3 月 12 日

B.3　費用最小化問題

B.3.1　生産費用の概念

まず、生産費用の概念として以下３つを定義する。

定義 B.26 (固定費用—fixed cost) [21,22]生産計画期間中に投入量を変化させることのできない固定生産要素の投入にかかる費用。

定義 B.27 (可変費用—variable cost) 生産計画期間中に自由に投入量を変化させることができる生産要素の投入にかかる費用。

定義 B.28 (限界費用—marginal cost) [23]限界的に産出量を増加した場合の産出量１単位当たりの可変費用の増分。

以下では、第１生産要素以外の生産要素投入量を所与として (つまり可変生産要素が第１要素のみの場合)、生産費用の概念を紹介する。固定生産要素 ($j = 2, \ldots, n$) の投入ベクトルを $\bar{x}_f$、固定生産要素価格ベクトルを w_f と表すと、固定費用 C_f は

$$C_f(w_f, \bar{x}_f) \equiv \sum_{j=2}^{n} w_j \bar{x}_j \tag{B.14}$$

で表される。可変生産費用を C_v とすると (総) 費用関数—(total) cost function, C, は

$$C(y; w_1, w_f, \bar{x}_f) \equiv C_v(y; w_1, \bar{x}_f) + C_f(w_f, \bar{x}_f) \tag{B.15}$$

で表される。

これらの下で、制約付要素需要関数が次のように定義できる。

定義 B.29 (制約付要素需要関数—constrained factor demand function) 固定生産要素投入量 $\bar{x}_f$、および産出量 y を所与としたときの生産関数 $f(x)$ の可変要素投入量 x_1 についての逆関数の値 $h_1(y; \bar{x}_f)$ を制約付要素需要関数と呼ぶ。

制約付要素需要関数を用いて費用関数を次のように書き直すことができる。

$$C(y; w_1, w_f, \bar{x}_f) \equiv w_1 h_1(y; \bar{x}_f) + C_f(w_f, \bar{x}_f) \tag{B.16}$$

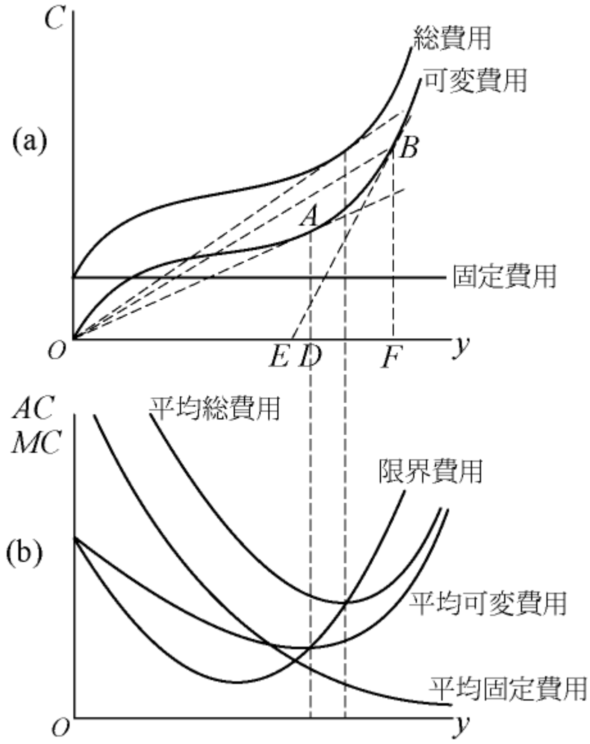


図 B.18: 総・限界・平均費用曲線

事実 B.10 (平均可変費用—average variable cost) [24]$AVC(y) \equiv C_v(y; w_1, \bar{x}_f)/y$ と表され、限界生産性逓減 (逓増) の下では右上がり (下がり) の曲線となる。

事実 B.11 (平均固定費用—average fixed cost) $AFC(y) \equiv C_f(\bar{x}_f, w_f)/y$ と表され、右下がりの双曲線となる。

事実 B.12 (平均費用—average cost) [25]$AC(y) \equiv AVC(y) + AFC(y)$ と表され、限界費用が平均費用を上 (下) 回るときに右上がり (下がり) となる。したがって、限界費用曲線は平均費用 (平均可変費用) が最小となる点で平均費用曲線 (平均可変費用曲線) と交わる。

事実 B.13 (限界費用—marginal cost) 費用関数 C が産出量 y について微分可能であるとき、限界費用は

$$MC(y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} C(y; w_1, w_f, \bar{x}_f) \tag{B.17}$$

と表される。

[21]固定費用には、　埋没費用− sunk costs − (工場や機械類などの耐久財を自己資金で購入した場合の機会費用) や、　減価償却費—depreciation cost—(耐久財の減耗に対する更新投資に伴う費用) など、複数計画期間にまたがって発生し、各期の最適化行動が相互に依存するような、動学的な費用と、　維持費用—maintenance cost—(耐久生産財の整備・維持費用) や、　経営管理費—management cost—など、直接生産量に関連しないが、恒常的に投入が必要で、各計画期間において同様に発生する、静学的な費用がある。

[22]各固定生産要素については、固定費費用を足し合わせ、それを当該生産要素 j の投入量 x_j で除したものを要素価格 w_j とする。

[23]総費用関数の微分可能性の下でのみ定義可能。

[24]図 B.18 参照。図 (a) 中 A 点において平均・限界可変費用はともに $\overline{AD}/\overline{OD}$ で等しくなる。B 点では、限界可変費用 $\overline{BF}/\overline{EF}$ は平均可変費用 $\overline{BF}/\overline{OF}$ を上回る。

[25]平均生産性曲線と限界生産性曲線の持つ性質と対称的になっている（図 B.13 参照）。

B.3.2 費用最小化と費用関数の導出

可変生産要素が２種類以上ある場合の費用最小化問題を考察する[26]。この場合の費用最小化問題は以下のように記述できる。

$$\min_{x_v \in R^k_+} \sum_{i=1}^{k} w_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} w_i \bar{x}_i \tag{B.18}$$
$$s.t. \quad f(x_v; \bar{x}_f) = y$$

この問題は、総生産費用のうち常に一定な固定費用部分 $\sum_{i=k+1}^{n} w_i \bar{x}_i$ を除いた可変費用のみを最小化する問題

$$\min_{x_v \in R^k_+} \sum_{i=1}^{k} w_i x_i \tag{B.19}$$
$$s.t. \quad f(x_v; \bar{x}_f) = y$$

と同値である。生産関数の微分可能性を仮定すれば、問題 (B.19) の最適条件をラグランジュ未定乗数法[27]を用いて記述することができる。関数

$$L(x_v, \lambda) = \sum_{i=1}^{k} w_i x_i + \lambda \{y - f(x_v; \bar{x}_f)\} \tag{B.20}$$

を定義すると、最適の一階条件は[28]

$$w_i = \lambda^* \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_v^*; \bar{x}_f) \quad \text{if } x_i^* > 0, \tag{B.21}$$
$$w_i \geq \lambda^* \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_v^*; \bar{x}_f) \quad \text{if } x_i^* = 0 \tag{B.22}$$
$$f(x_v^*; \bar{x}_f) = y \tag{B.23}$$

と表される。$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_v^*; \bar{x}_f) > 0$ のとき（B.21,B.22) は

$$\frac{w_i}{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_v^*; \bar{x}_f)} = \lambda^* \quad \text{if } x_i^* > 0, \tag{B.24}$$
$$\frac{w_i}{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_v^*; \bar{x}_f)} \geq \lambda^* \quad \text{if } x_i^* = 0 \tag{B.25}$$

のように書ける。各式の左辺は、(最適解において) 第 i 要素のみの追加的投入による限界費用である。右辺の λ^* は最適における限界費用であるから、内点解においては、生産量の限界的な増加のために、どの要素を用いても同一の費用がかかることを意味する。一方、端点解においては、$x_i^* = 0$ となる要素 i を用いて限界的に生産量を増加する費用は、最適における限界費用を上回り、投入量をゼロとすることが最適となる。

式 (B.21,B.22）の両辺比を取れば

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_v^*; \bar{x}_f)}{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_v^*; \bar{x}_f)} = TRS_{ij}(x_v^*, y; \bar{x}_f) \quad \text{if } x_i^*, x_j^* > 0, \tag{B.26}$$
$$\frac{w_i}{w_j} \geq TRS_{ij}(x_v^*, y; \bar{x}_f) \quad \text{if } x_i^* = 0 \text{ and } x_j^* > 0 \tag{B.27}$$

を得、最適の１階条件は要素価格比と限界代替率の関係で表される。

事実 B.14 (最適の１階条件) 最適 (内点) 解においては、生産要素価格比と技術的限界代替率が一致する。

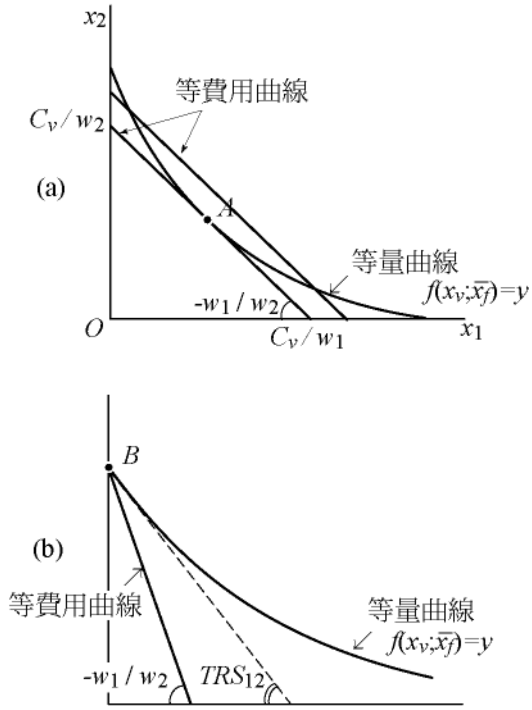


図 B.19: 費用最適化問題の最適解

最適の1階条件 (B.26,B.27) および2階条件に関する直感的理解は、可変生産要素が2種類の場合 ($k=2$) について図 B.19 を用いることにより以下の手順で幾何学的に得ることができる。

1. 等量曲線 $f(x_1,x_2;\bar{x}_f)=y$ を描く（最適解はこの等量曲線上の投入ベクトルでなくてはならない)。

2. 可変生産要素価格ベクトル w_v を所与として、可変費用が任意の値 C_v となるような可変生産要素投入量ベクトル (x_1,x_2) の集合として、「等費用曲線—iso-cost curve」を描く (図 (a) 参照)。x_1-x_2 平面において、等費用曲線は傾きが生産要素価格比率 $-w_1/w_2$ の右下がりの直線となる。

   より下方に位置する等費用曲線はより小さい費用に対応するため、可変要素価格 w_v を所与として、産出量 y を最小費用で達成する投入ベクトルは、等量曲線上の点のうち最も下方に位置する等費用曲線上になくてはならない。

3. 従って、最適において以下の3つの場合が考えられる：

$$x_1^*=0 \text{ かつ } x_2^*>0 \Rightarrow TRS_{12}(x_v^*,y;\bar{x}_f)\le w_1/w_2 \tag{B.28}$$

$$x_1^*>0 \text{ かつ } x_2^*>0 \Rightarrow TRS_{12}(x_v^*,y;\bar{x}_f)= w_1/w_2 \tag{B.29}$$

$$x_1^*>0 \text{ かつ } x_2^*=0 \Rightarrow TRS_{12}(x_v^*,y;\bar{x}_f)\ge w_1/w_2 \tag{B.30}$$

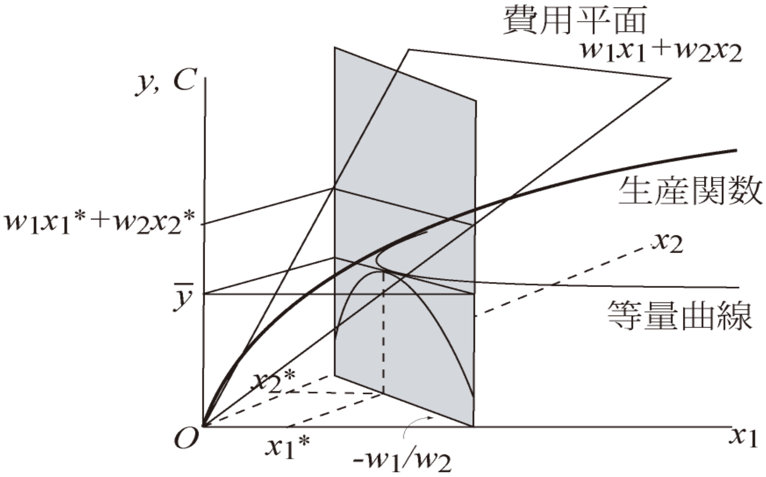
   内点解であれば（B.29) が成立し、最適解は図 B.19(a) の点 A(等量曲線と等費用曲線が接した点) で表される (事実 B.14)。生産に両方の生産要素が必要ではなく、$x_1=0$ において要素1の (相対) 価格 w_1/w_2 が $f(x_1,x_2;\bar{x}_f)=y$ の下での技術的限界代替率 TRS_{12} の最大値を上回れば (B.28) により図 B.19(b) 端点解 B となる。

[26]費用最小化問題とは、通常、任意の産出量の下で生産要素価格を所与として費用を最小にする投入ベクトルを選択する問題を意味する。

[27]Varian[3, Ch.27] 参照。

[28]最適においてラグランジュ乗数 λ は限界費用に等しいことに注意。

4. 最適の 2 階条件 (内点解の場合) は、$D^2_{x_v}L(x_v^*,\lambda^*;\bar{x}_f)$ が半正値定符号、すなわち $D^2_{x_v}f(x_v^*;\bar{x}_f)$ が半負値定符号であることにより与えられる。これは、現在の問題に関しては、図 4 において、最適 (内点) 解 (x_1^*,x_2^*) を通り等量曲線 $f(x_v;\bar{x}_f)=y$ に接する垂直平面 (図中の灰色平面) による、生産関数の切り口が、(x_1^*,x_2^*) 付近で上に凸となること (つまり、$f(\cdot)$ が (x_1^*,x_2^*) において極大となること）を意味する。なお、１階条件により、この切り口は等費用直線 $w_1x_1+w_2x_2=w_1x_1^*+w_2x_2^*$ に沿った切り口であり、最小化費用のもとで実現可能な投入・産出量の関係を表している。今、(x_1,x_2) の微



小変化を $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ と表し、それに伴う生産関数の変化を考える。$f(\cdot)$ の (x_1^*,x_2^*) における２次のテイラー展開は

$$\begin{aligned}
f(x_1^*+\varepsilon_1,x_2^*+\varepsilon_2) &\approx f(x_1^*,x_2^*)+\frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\varepsilon_2 \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\varepsilon_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\varepsilon_1\varepsilon_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\varepsilon_2^2\right\} \\
&= f(x_1^*,x_2^*)+(f_1,f_2)\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix} \\
&\quad+\frac{1}{2}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix} \qquad \text{(B.31)}
\end{aligned}$$

と表される。一方、１階条件に従う $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ は

$$f_1\varepsilon_1+f_2\varepsilon_2=0 \qquad \text{(B.32)}$$

を満たすから、(x_1^*,x_2^*) で産出量が最大となるための必要条件は

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}\le 0 \qquad \text{(B.33)}$$

であり、これは $D^2_{x_v}f(x_v^*;\bar{x}_f)$ が半負値定符号であることを意味している ■

１階条件 (B.21-B.23) を満たす最適投入ベクトルを「制約付要素需要関数」（定義 B.29）として

$$h(y;w_v,\bar{x}_f)=(h_1(y;w_v,\bar{x}_f),\ldots,h_k(y;w_v,\bar{x}_f)) \qquad \text{(B.34)}$$

と表すと、最小可変費用関数は以下のように書ける。

$$C_v(y;w_v,\bar{x}_f)=\sum_{i=1}^{k}w_ih_i(y;w_v,\bar{x}_f) \qquad \text{(B.35)}$$

この制約付要素需要関数を用いて、費用最小化行動の下での生産要素の相対価格変化に伴う最適投入量の変化について、以下の代替の弾力性を定義することができる。

定義 B.30 (代替の弾力性) [29]制約付需要 $h(y; w_v, \overline{x}_f)$ を x^* で表すと、第 i, j 生産要素の相対価格 w_i/w_j の変化に伴う最適投入量比率 x_i^*/x_j^* の変化は

$$\sigma_{ij}(x^*) = -\frac{d(x_i^*/x_j^*)}{d(w_i/w_j)} \frac{w_i/w_j}{x_i^*/x_j^*} \tag{B.36}$$

で表され、これを x^* における代替の弾力性と呼ぶ。

代替の弾力性は、価格比の変化に対する需要量比の変化の間の弾力性であるが、要素価格比の変化に対する、要素投入額比の変化、つまり、生産費用に占める費用シェア比の変化の関係として理解すると、その意味を理解しやすい。そのために、第 i, j 生産要素の投入額比を全微分すると

$$\begin{aligned} d\left(\frac{w_i x_i}{w_j x_j}\right) &= \frac{x_i}{x_j} d\left(\frac{w_i}{w_j}\right) + \frac{w_i}{w_j} d\left(\frac{w_i}{w_j}\right) \\ &= \left\{1 + \frac{w_i/w_j}{x_i/x_j} \frac{d(x_i/x_j)}{d(w_i/w_j)}\right\} \frac{x_i}{x_j} d\left(\frac{w_i}{w_j}\right) \\ &= (1-\sigma) \frac{x_i}{x_j} d\left(\frac{w_i}{w_j}\right) \end{aligned} \tag{B.37}$$

と表すことができ、弾力性が 1 より大きいとき（$\sigma > 1$）は、相対価格の上昇に対して、当該要素への需要の減少が大きく、生産費用に占めるその要素のシェアは減少する。逆に、弾力性が 1 より小さいときは ($\sigma < 1$)、相対価格の上昇に対して、当該要素への需要の減少は小さく、費用シェアの変化には、相対価格の変化がより反映され、当該要素の費用シェアは上昇する。弾力性が 1 のときは（$\sigma = 1$)、費用シェアが一定となる。

B.3.3 長期費用と短期費用

すべての生産要素が可変 $(k = n)$ である長期における費用最小化問題は

$$\min_{x_v \in R_+^n} \sum_{i=1}^n w_i x_i \tag{B.38}$$
$$s.t. \quad f(x) = y$$

とあらわされ、その最適解ベクトルは

$$h(y; w) = (h_1(y; w), \ldots, h_n(y; w)) \tag{B.39}$$

となる。従って最小費用は

$$C(y; w) = \sum_{i=1}^n w_i h_i(y; w) \tag{B.40}$$

と表される。長期費用関数 (B.40) と短期費用関数 (B.15) の関係は次のように表すことができる。

$$C(y; w) = \min_{x_f} C(y; w_v, w_f, x_f) \tag{B.41}$$

この最適解を $h_f(y; w) = x_f^* = (x_{k+1}^*, \ldots, x_n^*)$ と書けば、

$$C(y; w) = C(y; w_v, w_f, h_f(y; w)) \tag{B.42}$$

[29] ここでは、所与の産出量の下で、つまり同一等量曲線上での代替の弾力性を定義しているが、等費用曲線上での代替の弾力性を定義することもできる（事実 B.28 参照)。

となり、式 (B.41) において内点解を仮定すれば、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}C(y;w) &= \frac{\partial}{\partial y}C(y;w_v,w_f,h_f(y;w)) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}C(y;w_v,w_f,x_f^*) + \sum_{i=k+1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}C(y;w_v,w_f,x_f^*)\frac{\partial}{\partial y}h_i(y;w) \end{aligned} \tag{B.43}$$

が成立する。式 (B.41) の１階条件により

$$\frac{\partial}{\partial x_i}C(y;w_v,w_f,x_f^*) = 0 \tag{B.44}$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial y}C(y;w) = \frac{\partial}{\partial y}C(y;w_v,w_f,x_f^*) \tag{B.45}$$

となる。

事実 B.15 (長・短期費用曲線の関係) 長期の限界費用は、その産出量の下で最適な固定生産要素投入量を選んだときの短期限界費用に等しく、長期費用曲線は短期費用曲線の下側の包絡線となっている (図 $B.20$)[30]。同様に、長期平均費用曲線も短期平均費用曲線の包絡線である (図 $B.21$)[31]。

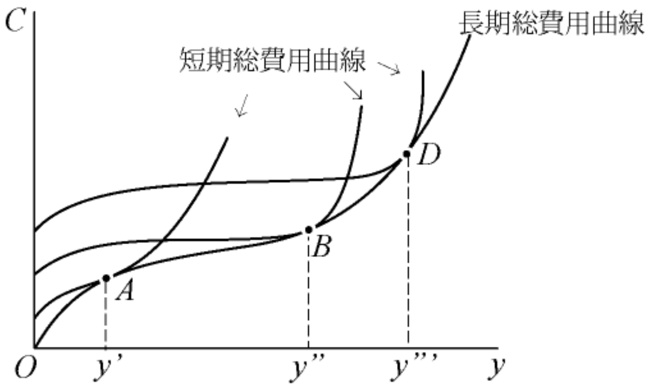


図 B.20: 長・短期総費用曲線

B.3.4　費用関数の性質

費用関数 (および可変費用関数) は所与の産出量および要素価格の下での最小費用を表しているから、産出量が増加、あるいは、要素価格が上昇すれば費用関数の値も増加しなくてはならない（y に関する微分可能性の下では、前者は Kuhn-Tacker 条件により $\partial C(y,w)/\partial y = \lambda \geq 0$ からも明らか）:

事実 B.16 (費用関数の産出量に関する増加性) $y' > y \Longrightarrow C(y';w) \geq C(y;w)$。

事実 B.17 (費用関数の要素価格に関する非減少性) [32]$w' \geq w \Longrightarrow C(y;w') \geq C(y;w)$

[30]図において長期総費用曲線と点 A,B,D において接する短期総費用曲線は、固定生産要素投入量が、それぞれ、産出量 y', y'', y''' の下での最適量となっている。

[31]図 B.20 において、短期総費用曲線のうち点 A,B,D など長期総費用曲線と接する点を持つ場合、長・短期の平均・限界費用は、図 B.21 の点 B,C および点 A,D の様に一致している。

[32]費用関数は要素価格の強い意味での増加関数ではないことに注意。これは、費用最小化問題の最適解、つまり制約付要素需要関数の値がある要素についてゼロである場合 (つまり、最適解が端点である場合)、その要素の価格が上昇しても費用に影響がない可能性があるからである。

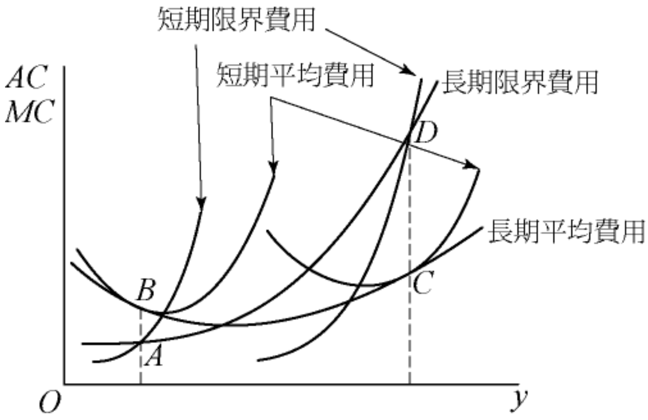


図 B.21: 長・短期限界・費用曲線

また、所与の産出量 y を達成する生産要素の最適投入量は、生産要素の相対価格のみに依存することから、以下の性質を得る。

事実 B.18 (費用関数の要素価格に関する１次同次性) 任意の $t > 0$ について $C(y; tw) = tC(y; w)$

定義 B.31 (要素価格フロンティア—factor price frontier) 産出量 y、固定生産要素投入量 $\bar{x}_f$、および可変生産費用 $\overline{C}_v$ を所与としたときの、可変生産要素価格ベクトルの集合

$$\{w_v \equiv (w_1, \ldots, w_k) \in R^k_+ | C_v(y; w_v, \bar{x}_f) = \overline{C}_v\} \tag{B.46}$$

を要素価格フロンティアと呼ぶ。

事実 B.19 (費用関数の凹性 (要素価格フロンティアの凸性)) [33]産出量 y を所与としたとき、価格ベクトル w と w' が総費用 $\overline{C}$ に対応する同一の要素価格フロンティア上にあるならば、その凸結合 $w'' = \lambda w + (1 - \lambda)w' (0 \leq \lambda \leq 1)$ を含む要素価格フロンティアは総可変費用 $\overline{C}$ に対応するものと同じかより原点から離れており、対応する総可変費用 $\overline{\overline{C}}$ は少なくとも $\overline{C}$ である。つまり、

$$C(y; w'') \geq \lambda C(y; w) + (1 - \lambda)C(y; w') \tag{B.47}$$

が成立する。

証明. x'' を産出量 y および要素価格 w'' の下での最適投入ベクトルとすると

$$C(y; w) \leq \sum_{i=1}^{n} w_i x''_i$$
$$C(y; w') \leq \sum_{i=1}^{n} w'_i x''_i$$
$$C(y; w'') = \sum_{i=1}^{n} w''_i x''_i$$

であることから（B.47) を得る。 □

費用関数が凹関数であること (事実 B.19）より、以下を得る。

事実 B.20 (費用関数の要素価格に関する連続性) [34]$C(y; w)$ は $w > 0$ において w の連続関数である。

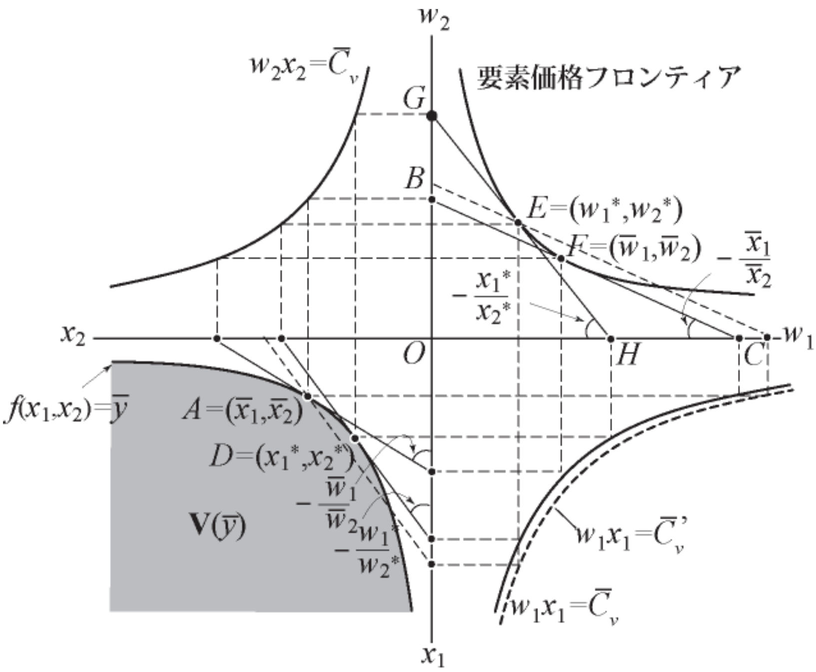


図 B.22: 要素価格フロンティアの導出

図 B.22 を用いて可変生産要素が 2 種類の場合について、以下の手順に沿って等量曲線と要素価格フロンティアの関係を幾何学的に理解できる。

1. 産出量 $\overline{y}$ を所与として等量曲線 $f(x_1, x_2) = \overline{y}$ を第 3 象限に描く。

2. 総可変生産費用 $\overline{C}_v$ を所与として、第 1 生産要素のみの投入する場合について生産要素の価格と投入量の関係

$$w_1x_1 = \overline{C}_v \tag{B.48}$$

を第 4 象限 (横軸は w_1）に、同様に、第 2 生産要素のみの投入する場合について生産要素の価格と投入量の関係

$$w_2x_2 = \overline{C}_v \tag{B.49}$$

を第 2 象限 (縦軸は w_2）に描く。

3. 等量曲線上の投入ベクトル $A = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ を所与としたとき、総可変生産費用が $\overline{C}_v$ となるような生産要素価格ベクトル (w_1, w_2) は第 1 象限における等費用直線 BC

$$w_1\overline{x}_1 + w_2\overline{x}_2 = \overline{C}_v \tag{B.50}$$

で表される。$\triangle BOC$ 内部が、投入ベクトル A を選んだ場合に可変費用が $\overline{C}_v$ 以下になる要素価格ベクトルの集合である。特に、この直線の傾きは第 1・2 生産要素の投入量比 $-\overline{x}_1/\overline{x}_2$ となっていること、また、点 A は要素価格 $(\overline{w}_1, \overline{w}_2)$ の下での最適投入ベクトルであり（つまり点 A において等量曲線の勾配は要素価格比 $-\overline{w}_1/\overline{w}_2$ に等しくなっている)、最小化された費用は $\overline{C}_v$ になっていることに注意しよう。

[33] 2 階微分可能性の下では、費用関数の凹関数となる必要十分条件は、$D^2_wC(y; w)$ が全ての w の下で半負値定符号となることである（事実 B.23 参照)。

[34] 費用関数 $C(y; w)$ が w の凹関数であることから。凹関数 (または凸関数) の連続性の証明は Berge[1, Theorem 7, pp.193-194] 参照。ただし、微分可能とは限らない (注意 B.1 参照)。生産関数が弱い擬凹関数や強い擬凹関数でも微分可能でない場合については注意 B.1 参照。

4. 手順 3 の手続きで、産出量 $\overline{y}$、総可変生産費用 $\overline{C}_v$ を所与としたときの、要素投入量平面 (第 3 象限) に描かれた等量曲線 $\{(x_1, x_2)|f(x_1, x_2) = \overline{y}\}$ 上の各投入ベクトルに対応する等費用直線を、要素価格平面 (第 1 象限) に描く。例えば、等量曲線上の点 $D = (x_1^*, x_2^*)$ に対しては等費用直線 GH が描ける。

5. さて、点 D では、要素価格 (w_1^*, w_2^*) の下で最小化された (つまり点 D において等量曲線の勾配 $TRS_{12}(x^*)$ は要素価格比 $-w_1^*/w_2^*$ に等しくなっている) 費用が $\overline{C}_v$ となっている。この要素価格比の下で、同じ等量曲線上の点 A でも $\overline{y}$ の生産は可能であるが、この場合は費用が最小化されていない。なぜなら、要素価格平面 (第 1 象限) において、投入ベクトル D が最適解となる要素価格ベクトルを示す点 $E = (w_1^*, w_2^*)$ を通り、勾配が $-\overline{x}_1/\overline{x}_2$ であるような等費用直線は、$\overline{C}_v$ より大きい $\overline{C}'_v$ に対応し、点 E は $\triangle BOC$ の外部に位置するからである。

6. 従って、ある価格ベクトル $E = (w_1^*, w_2^*)$ が要素価格フロンティア上にあるならば、その点はある等費用直線（GH）上にはあるが、他のどの等費用曲線上にもその内側にもない点であるはずである。つまり、等量曲線上の全ての投入ベクトルに対応する等費用直線の上方包絡線が要素価格フロンティアである。このことは、ある要素価格ベクトル下での要素価格フロンティアの勾配が、最適な生産要素投入量比率に等しいことを意味する (事実 B.22 参照)。例えば、上で確かめたように、対応する等量曲線上の点 $D = (x_1^*, x_2^*)$ と要素価格フロンティア上の点 $E = (w_1^*, w_2^*)$ の間には、点 E における要素価格フロンティアの (または GH) の勾配が $-x_1^*/x_2^*$、点 D における等量曲線の勾配が $-w_1^*/w_2^*$ という関係が成り立っている。

   また、より大きい費用に対応する要素価格フロンティアは、原点からより離れた位置にあることが容易に確認できることから（事実 B.18 参照)、要素価格フロンティア上の各点 (w_1^*, w_2^*) は、等量曲線上の各点 (x_1^*, x_2^*) について問題

$$\begin{aligned} &\max_{w_v} C_v(y; w_v, \overline{x}_f) \\ &s.t. \quad \textstyle\sum_{i=1}^{k} w_i x_i^* = \overline{C}_v \end{aligned} \tag{B.51}$$

   の解として得られると理解できる。最大化問題 (B.51) は費用最小化問題（B.19）の双対問題である。

次のシェパードの補題は、双対問題（B.51）の 1 階条件、要素価格フロンティアの勾配に関する性質（事実 B.22）から得られる。

事実 B.21 (シェパードの補題—Shephard's lemma) [35]費用関数 C が w^* において微分可能であれば (制約付要素需要ベクトルが一意ならば)

$$\frac{\partial}{\partial w_i} C(y; w^*) = h_i(y; w^*) \tag{B.52}$$

証明. 産出量 y、要素価格 w^* のもとで、生産要素の最適投入量を x^* で表す。次に関数

$$\phi(y; w) = C(y; w) - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^* \tag{B.53}$$

を定義する。x^* は w^* のもとで y を生産するために費用を最小化するような投入ベクトルであるため、ϕ は非正の値をとり、$w = w^*$ のとき最大値 0 をとる関数である。従って、ϕ が微分可能なら

$$\frac{\partial}{\partial w_i} \phi(y; w^*) = \frac{\partial}{\partial w_i} C(y; w^*) - x_i^* = 0 \tag{B.54}$$

が成立する。$x_i^* = h_i(y; w^*)$ であるから（B.52）を得る。 □

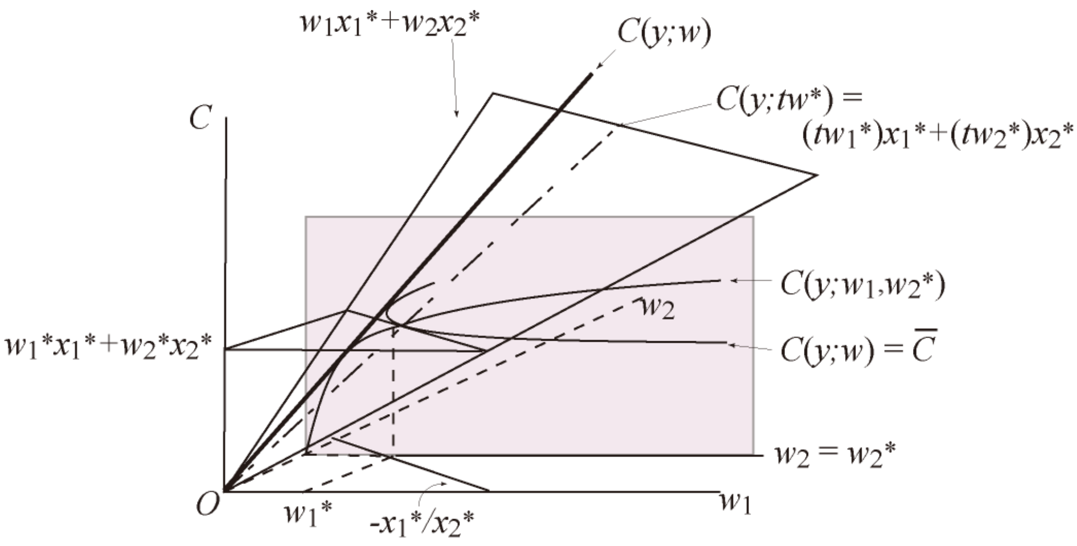


図 B.23: シェパードの補題図説

上の証明は図 B.23・B.24 を用いて生産物１種類、生産要素２種類の場合に、次の手順で幾何学的に理解することができる。

1. 費用関数は凹関数であり (事実 B.19)、要素価格に関して１次同次であること（事実 B.18) から、図 B.23 に描かれるように、費用関数の下方部分は原点を頂点とする凸錘である。

2. $\phi(y;w)$ は、(費用最小化問題における）最適投入ベクトル (x_1^*, x_2^*) を所与とする費用曲面 (平面)$C(y;w,x^*) = w_1x_1^* + w_2x_2^*$ と、費用関数 $C(y;w)$ の乖離を測る関数である。これら２曲面は、直線
$$C(y; w = tw^*) = (tw_1^*)x_1^* + (tw_2^*)x_2^* \tag{B.55}$$
で接している。

3. $\phi(\cdot)$ の w_1 に関する微係数は、$w_2 = w_2^*$ 平面でのこれら２曲面の切り口の乖離、$\phi(y, w_1, w_2^*)$、の w_1 方向に関する微係数である。特に式 (B.55) において $t = 1$ のときの２曲面の接点で、要素価格フロンティアが (w_1^*, w_2^*) において等費用線 $w_1x_1^* + w_2x_2^* = \overline{C} \equiv C(y;w^*)$ と接している (双対問題１階条件)。このことは、費用最小化問題の最適投入ベクトル (x_1^*, x_2^*) が等費用線 $w_1x_1^* + w_2x_2^* = \overline{C}$ の法線ベクトル、つまり $(\partial C/\partial w_1, \partial C/\partial w_2) = (x_1^*, x_2^*)$、となっていることを意味し (図 B.24 参照)、シェパードの補題が従う。■

事実 B.22 (要素価格フロンティアの勾配：双対問題１階条件) 産出量 $\overline{y}$ および生産費用 $\overline{C}$ を所与とした要素価格フロンティア上では、シェパードの補題 (B.52) を用いれば、
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial w_i} C_v(\overline{y}; w^*) dw_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^* dw_i = 0 \tag{B.56}$$
が成立する。つまり、可変生産要素の各ペア i, j につき、要素価格フロンティアの勾配は
$$-\left.\frac{dw_i}{dw_j}\right|_{\substack{dC=0 \\ dy=0 \\ dw_l=0,\ l\neq i,j}} = \frac{x_j^*}{x_i^*} > 0 \tag{B.57}$$
となり、最適投入量比率と一致する。

[35]問題（B.51）の解 w_v^* において $\overline{C}_v$ は $C_v(y; w_v^*, \overline{x}_f)$ に一致するため (ラグランジュ乗数値は１となる)、シェパードの補題は、この最適化問題の最適１階条件より得られる。

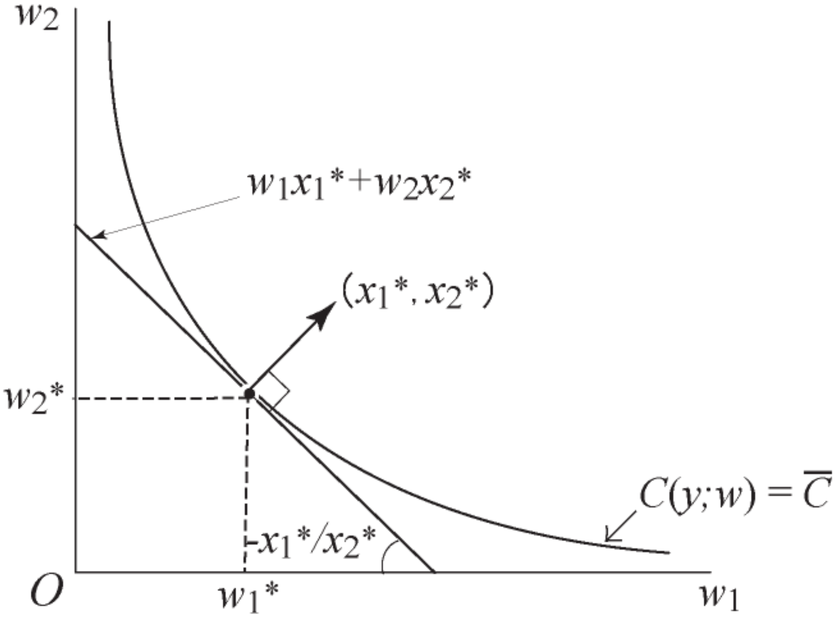


図 B.24: 費用最小化問題の双対問題における最適１階条件

費用関数が２階微分可能であるときに、費用関数の要素価格に関する１次同次性 (事実 B.18)、凹性、シェパードの補題（事実 B.21）より以下の結果を得る。

事実 B.23 (制約付要素需要関数の性質) 費用関数 C が *2* 階微分可能であれば以下の性質を持つ。

(i) 制約付要素需要関数は要素価格に関して０次同次[36](従って、オイラーの定理より $D_w h(y;w) \cdot w = 0$)。

(ii) $D_w^2 C(y;w) = D_w h(y;w)$ は対称な半負値定符号行列—*symmetric and negative semidefinite matrix*—である[37,38]。特に、任意の i について $\frac{\partial}{\partial wi} h_i(y;w) \leq 0$、任意の i,j について $\frac{\partial}{\partial w_j} h_i(y;w) = \frac{\partial}{\partial w_i} h_j(y;w)$、さらに、制約付要素需要の法則ー *law of compensated factor demand* ーが成立する：$dw \cdot dh = dw \cdot D_w^2 C(w) dw \leq 0$

証明（制約付要素需要の法則）. シェパードの補題 $D_w C(y;w) = h(y,w)$ より、$dh = D_w^2 C(y;w) dw$。両辺に dw をかければ、$D_w^2 C(y;w)$ は半負値定符号であるから、$dw \cdot dh = dw \cdot D_w^2 C(y;w) dw \leq 0$ を得る。 □

１生産物２生産要素の場合について図 B.25 を用いて以下の手順を踏めば、シェパードの補題・費用関数の凹性、費用関数の要素価格に関する非減少性、制約付要素需要関数の当該価格に関する非増加性について幾何学的な理解ができる。

1. まず、図 B.25 の第２象限には、横軸を第１生産要素の投入量 x_1、縦軸を第２生産要素の投入量 x_2 として、産出量 y^* の下での等量曲線が描かれている。

2. 第２生産要素の価格を１で固定とすると、$f(x) = y^*$ に対応する等量曲線上の投入ベクトル (x_1, x_2) を用いて生産を行うのに必要な費用総額は

$$C(w_1) = w_1 x_1 + x_2 \tag{B.58}$$

[36] (i) については、費用関数が要素価格について１次同次であることから、その価格に関する偏導関数、つまり制約付要素需要関数が要素価格について０次同次であることより証明できる。所与の産出量の下での最適要素投入量は、生産要素価格比のみに依存するためである。

[37] $D_w^2 C(y;w)$ の半負値定符号は、$C(y;w)$ の w に関する凹性と、２階微分可能性による（e.g., 神谷・浦井 [4, 定理 7.3.8, p.284]）。また、これは費用最小化の双対問題 (B.51) の２階条件でもある。

[38] 対称性は、費用関数の２階微分可能性の仮定より、要素価格変化に対する最小化生産費用の経路非依存性を意味する。

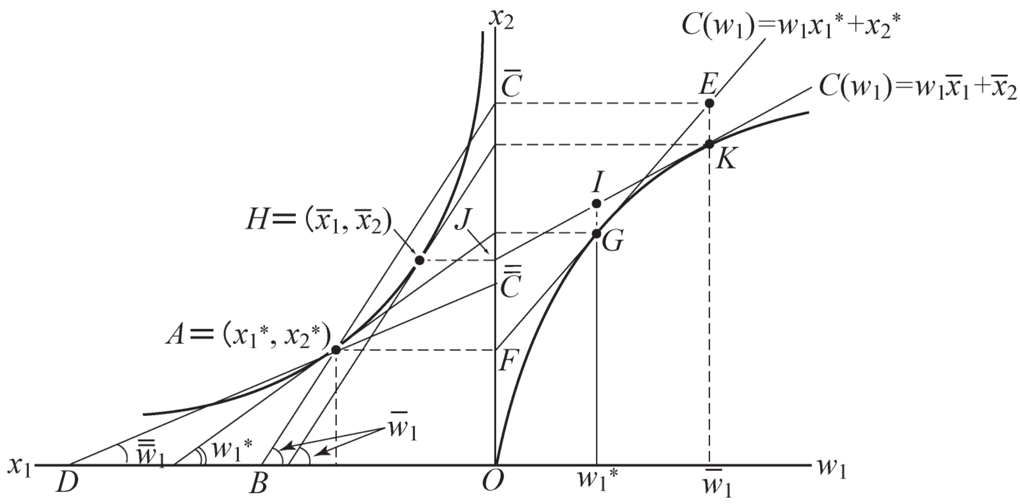


図 B.25: 等量曲線と費用曲線の対応関係

である。第１生産要素の価格 w_1、および費用 C を所与とすれば、これは投入ベクトル (x_1, x_2) を通る等費用曲線である。例えば、等量曲線上 A 点に対応する投入ベクトル (x_1^*, x_2^*) が与えられた場合、第１生産要素の価格が $\overline{w}_1$ であるなら A 点を通る等費用曲線は BA を通る直線、$\overline{\overline{w}}_1$ であるなら DA を通る直線となる。第１生産要素価格の下での生産費用は縦軸の切片であり、それぞれ $\overline{C}$ と $\overline{\overline{C}}$ である。

3. 次に、第１象限に (B.58) のグラフを描くと、このグラフは、等量曲線上の各投入ベクトル (x_1, x_2) を選んだとき、第１生産要素の価格に応じた生産費用の変化を表す直線となる。従って、産出量 y^*、第２生産要素価格 $(= 1)$ を所与とし、第１生産要素価格 w_1 が与えられたときの費用最小化問題を考えると、右図で各 w_1 値の下で、最小の総生産費用に対応する直線 (B.58) は、w_1 において最も下方に位置するものである。

4. 例えば、等量曲線上の２点、A と H を比較してみよう。A 点（H 点) は $w_1 = w_1^*$ （$w_1 = \overline{w}_1$）のとき生産費用を最小にする投入ベクトルである。このことは、$w_1 = w_1^*$ （$w_1 = \overline{w}_1$）において最小費用を達成する直線 (B.58) は傾きが x_1^* $(\overline{x}_1)$ である FGE (JIK) であることに対応する。この例のように、等量曲線が原点に向かって強い意味で凸である場合、$w_1 = w_1^*$ において最小となる費用直線 FGE の傾き x_1^* は、$w_1 = \overline{w}_1$ において最小となる費用直線 JIK の傾き $\overline{x}_1$ よりも大きくなる。

5. 同様にして、等量曲線上の各投入ベクトルに関して費用直線 (B.58) を第１象限に描くと、各要素価格 w_1 の下で最適な投入ベクトルに対応する費用直線は、w_1 において最も下方に位置するものとして得られる。

6. 従って、これらの直線群の下側の包絡線 OGK が、第１生産要素価格の関数としての費用曲線となる。

7. 費用関数の w_1 についての偏微係数は、この包絡線 OGK の各第１生産要素価格 w_1 における傾きに等しく、$w_1 = w_1^*$ のときには x_1^* となる。すなわちシェパードの補題が成立する。

8. さらに、等量曲線が原点に向かって凸であるならば、第２生産要素集約的な投入ベクトルの下では (例えば、A 点に対して H 点)、直線の傾きは小さくなり (FGE に対して JIK)、費用曲線は w_1 に関して凹関数となる。このことは、式 (B.53) が $w_v = w_v^*$ のとき最大値 0 をとる関数であることから、ϕ の２階微分可能性を仮定すれば、

$$\frac{\partial^2}{\partial w_i^2}\phi(y; w_v^*, \bar{x}_f) \leq 0 \tag{B.59}$$

を意味し、シェパードの補題 (B.52) を適用すれば

$$\frac{\partial}{\partial w_i} h_i(y; w_v^*, \bar{x}_f) \leq 0 \tag{B.60}$$

を得る。■

生産関数と費用関数の形状について以下の関係が得られる。

事実 B.24 (収穫一定技術と費用関数) 生産関数 $f(x)$ が収穫一定ならば、費用関数 $C(y;w)$ および制約付要素需要関数 $h_i(y;w)$ も産出量 y に関して収穫一定となる。

証明. 以下、$w \in R^n_{++}, y \geq 0$ とする。$C(y;w) = w \cdot h(y;w)$ より、$h(y,w)$ が y に関して収穫一定であれば、同様に、$C(y;w)$ も y に関して収穫一定である。以下では、$h(y;w)$ の y に関する収穫一定性を示す。f が収穫一定であるから、$\lambda > 0$ とすると、任意の

$$x \in h(y;w) \tag{B.61}$$

について

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda y \tag{B.62}$$

さらに、任意の $x' \in R^n_+$ について、

$$f(x') \geq \lambda y \tag{B.63}$$

$$\Longrightarrow f(\lambda^{-1} x') = \lambda^{-1} f(x') \geq y \tag{B.64}$$

が成立する。一方、制約付要素需要の定義から、(B.61) と (B.64) は

$$w \cdot \left(\lambda^{-1} x'\right) \geq w \cdot x$$

を意味する。両辺に λ をかけた

$$w \cdot x' \geq w \cdot (\lambda x)$$

と $(B.63)$ より

$$\lambda x \in h(\lambda y; w)$$

従って

$$\lambda h(y;w) \subset h(\lambda y; w) \tag{B.65}$$

を得る。

同様の手続きを、λ の代わりに λ^{-1} を、y の代わりに λy として繰り返せば

$$h(\lambda y, w) \subset \lambda h(y;w)$$

が得られ、$(B.65)$ と合わせれば

$$h(\lambda y, w) = \lambda h(y;w)$$

が示される。□

事実 B.25 (収穫逓減技術と費用関数) 生産関数 $f(x)$ が凹関数ならば費用関数 $C(y;w)$ は産出量 y に関して凸関数となる。

証明. $w \in R^n_{++}, y, y' \geq 0, \lambda \in (0,1), x \in h(y;w), x' \in h(y';w), x^\lambda \equiv \lambda x + (1-\lambda)x'$ とすれば

$$\begin{aligned}\lambda C(y;w) + (1-\lambda)C(y';w) &= \lambda(w \cdot x) + (1-\lambda)(w \cdot x') \quad [\because \text{費用関数定義}]\\ &= w \cdot x^\lambda \\ &\geq C(f(x^\lambda);w) \quad [\because \text{費用関数定義}]\\ &\geq C(\lambda y + (1-\lambda)y';w) \quad [\because f \text{の凹性と費用関数の単調増加性}]\end{aligned}$$

□

また、必要投入量集合の凸性と制約付要素需要の凸性は以下のように対応する。

事実 B.26 (制約付要素需要関数の凸性) [39]必要投入量集合 $\mathbf{V}(y)$ が凸集合であれば、制約付要素需要 $h(y;w)$ も凸集合となる。さらに、$\mathbf{V}(y)$ が強い意味での凸集合であれば、$h(y;w)$ は唯一の投入ベクトルにより構成される。

証明. 以下、$w \in R^n_{++}, y \geq 0$ とする。制約付要素需要は

$$h(y;w) = \mathbf{V}(y) \cap \left\{x \in R^n_+ : w \cdot x = C(y;w)\right\}$$

と表せることに注意すれば、右辺の 2 つの集合は両者とも凸集合であるから、その共通部分も凸集合である。

つぎに、$\mathbf{V}(y)$ が強い意味の凸集合であるとき、$x, x' \in h(y;w)$、かつ、$x \neq x'$ であるとする。$h(y;w)$ の凸性より、任意の $\lambda \in (0,1)$ について

$$\lambda x + (1-\lambda)x' \in h(y;w) \tag{B.66}$$

しかし、$\mathbf{V}(y)$ は強い意味の凸集合だから

$$\lambda x + (1-\lambda)x' \gg x''$$

となるような $x'' \in \mathbf{V}(y)$ が存在し、その場合

$$w \cdot \{\lambda x + (1-\lambda)x'\} > w \cdot x''$$

が成り立つため、$(B.66)$ に矛盾する。従って、$h(y;w)$ は単一要素からなる。 □

注意 B.1 $(i)\mathbf{V}(y)$ が凸集合であっても強い意味で凸でない場合、要素価格フロンティアは角—*kink*—を持ち、制約付要素需要曲線は水平部分を持つ (図 $B.26$)。$(ii)\mathbf{V}(y)$ が角を持つ凸集合である場合、要素価格フロンティアは直線部分を持ち、制約付需要曲線は垂直部分を持つ (図 $B.27$)。$(iii)\mathbf{V}(y)$ が非凸集合である場合、要素価格フロンティアは角を持ち ($\mathbf{V}(y)$ の非凸性を反映しない)、制約付要素需要曲線は不連続となる (図 $B.28$)。

事実 B.27 (要素価格フロンティアの相似性) 費用関数の生産要素価格に関する 1 次同次性 (事実 $B.18$) より、ある可変費用 $\overline{C}_v$ に対応する要素価格フロンティア上に価格ベクトル $(w_1, \ldots, w_k)$ があるならば、価格ベクトル $(\lambda w_1, \ldots, \lambda w_k)$ は可変費用 $\lambda\overline{C}_v$ に対応する要素価格フロンティア上にある。この結果、ある産出量 y を所与とした要素価格フロンティア群は、原点に対して相似的な形状を持つ。

事実 B.28 (制約付要素需要の価格弾力性) 第 i 生産要素の制約付需要の第 j 生産要素価格に関する弾力性は

$$\eta^c_{ij}(y;w) = \frac{\partial h_i(y;w)/\partial w_j}{h_i(y;w)/w_j} \tag{B.67}$$

[39]注意 B.1$(i)(iii)$、および図 B.26・B.27 参照。

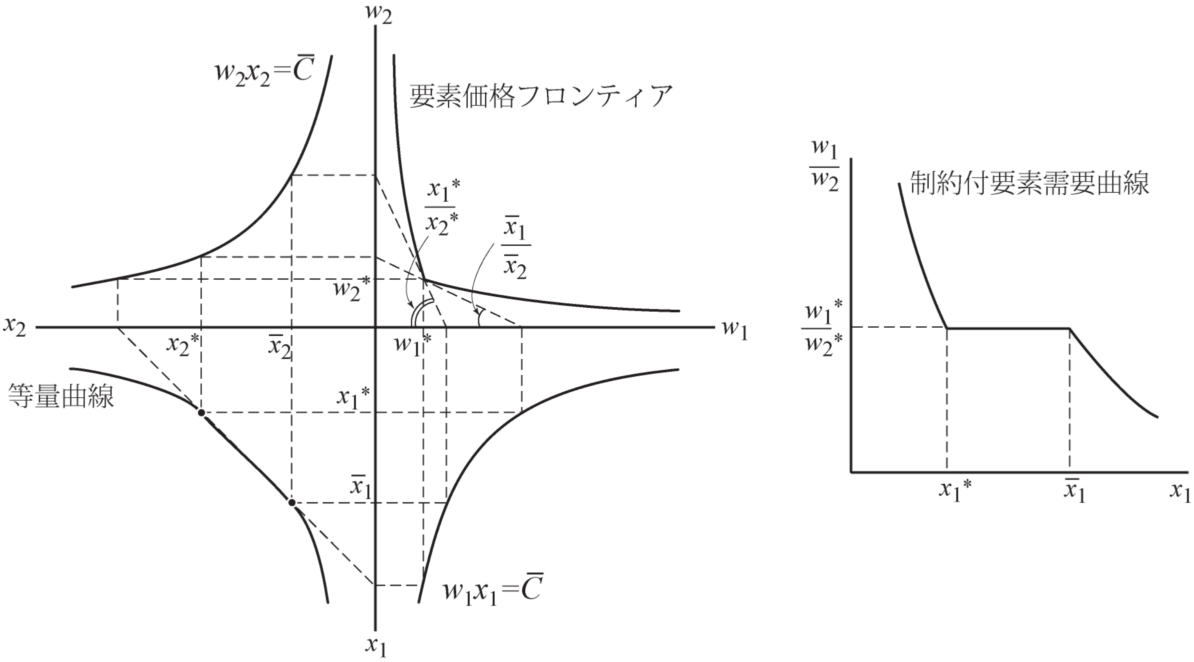


図 B.26: 必要投入量集合が弱い意味で凸な場合の要素価格フロンティアと制約付要素需要曲線

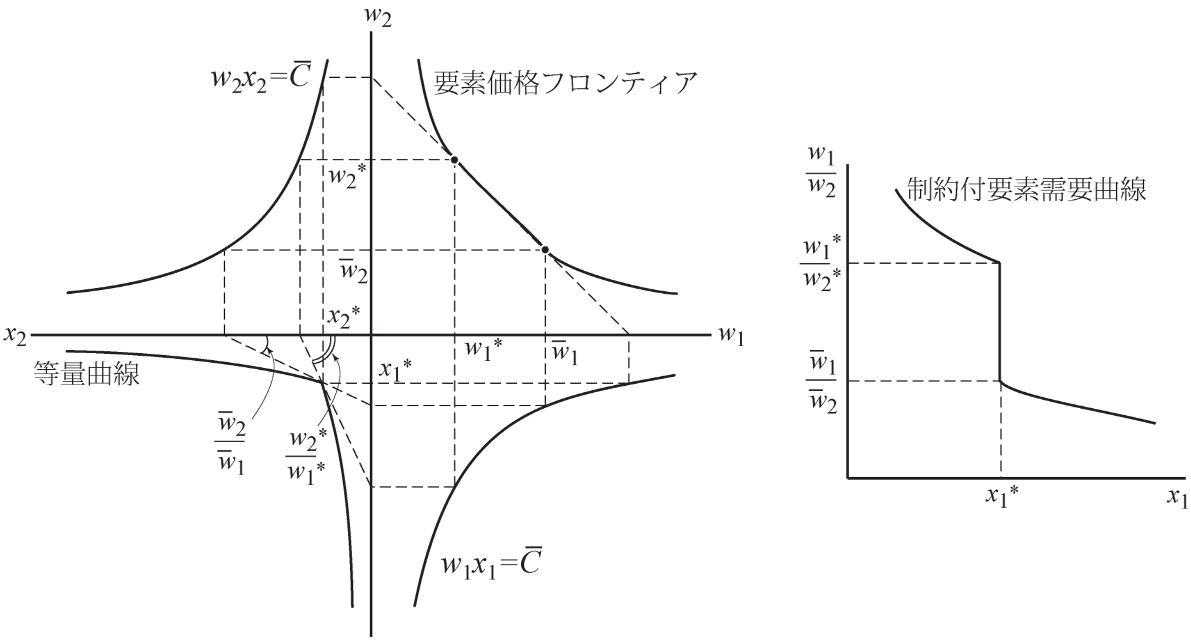


図 B.27: 必要投入量集合が角を持つ場合の要素価格フロンティアと制約付要素需要曲線

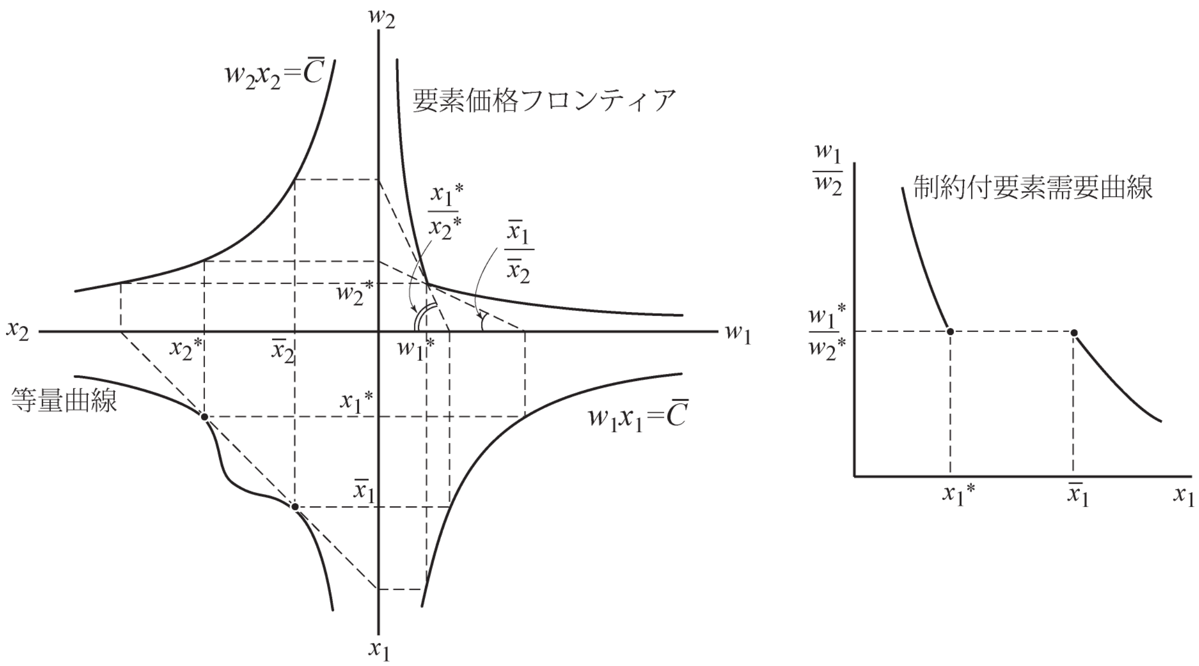


図 B.28: 必要投入量集合が非凸な場合の要素価格フロンティアと制約付要素需要曲線

と表され

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij}^{c} = 0 \tag{B.68}$$

を満たす。従って、$n = 2$ の場合、必ず 2 つの要素は代替的な生産要素となる。

証明. h_i を全微分して

$$\begin{aligned}
dh_i &= \frac{\partial h_i}{\partial y}dy + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h_i}{\partial w_j}dw_j \\
\frac{dh_i}{h_i} &= \frac{\partial h_i}{\partial y}\bigg/\frac{h_i}{y}\ \frac{dy}{y} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h_i}{\partial w_j}\bigg/\frac{h_i}{w_j}\ \frac{dw_j}{w_j} \\
d\ln h_i &= \eta_{iy}^{c} d\ln y + \sum_{j=1}^{n}\eta_{ij}^{c} d\ln w_j
\end{aligned}$$

$d\ln y = 0$ であるから、h_i の要素価格に関する 0 次同次性より、全ての要素価格を比例的に変化させる場合（つまり、$d\ln w_j$ が全ての j につい同じ値であるとき）

$$d\ln h_i = \sum_{j=1}^{n}\eta_{ij}^{c} d\ln w_j = 0$$

となり、(B.68) を得る。 □

定義 B.32 (費用関数の産出量弾力性)

$$\eta_{Cy}(y;w) = \frac{\partial}{\partial y}C(y;w)\bigg/\frac{C(y;w)}{y} \tag{B.69}$$

で定義される。従って、(i) $\eta_{Cy} = 1$ ならば生産関数は収穫一定、(ii) $\eta_{Cy} > 1$ ならば収穫逓減、(iii) $\eta_{Cy} < 1$ ならば収穫逓増となる。

事実 B.29 (平均費用関数の産出量弾力性)

$$\frac{\partial}{\partial \ln y}\left[\ln \frac{C(y;w)}{y}\right] = \eta_{Cy}(y;w) - 1 \tag{B.70}$$

だから、平均費用曲線が右上がり (費用は逓増) なら、生産関数は収穫逓減、右下がり (費用は逓減) なら収穫逓増、水平なら収穫不変となる。

事実 B.30 (制約付要素需要関数の産出量弾力性) 制約付要素需要関数の産出量弾力性は

$$\eta_{iy}^c \equiv \frac{\partial h_i(y;w)/\partial y}{h_i(y;w)/y} = \frac{\partial[\ln h_i(y;w)]}{\partial \ln y} \tag{B.71}$$

で表される。第 i 要素の支出シェアを

$$\theta_i \equiv \theta_i(y;w) = \frac{w_i h_i(y;w)}{C_v(y;w)} \tag{B.72}$$

と表すと、費用関数の産出量弾力性は

$$\eta_{Cy} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \eta_{iy}^c \tag{B.73}$$

となる。費用の弾力性は非負であり

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1 \tag{B.74}$$

だから、制約付需要の産出量弾力性がすべての可変要素について負になることはない。つまり、すべての生産要素が同時に下級生産要素[40]になることはあり得ない。

注意 B.2 下級生産要素とは、ある範囲の産出量について定義される概念であり、すべての産出量において産出の増大が投入の減少を産むわけではない (図 B.29 参照)。

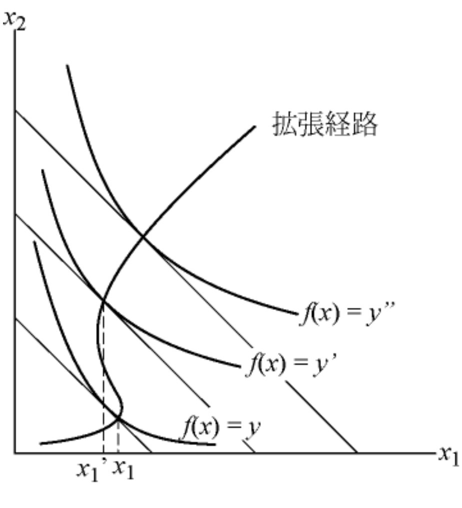


図 B.29: 拡張経路と下級生産財

[40]産出量の増大に伴って投入量が減少する、つまり

$$\frac{\partial}{\partial y} h_i(y;w) < 0$$

となる生産要素を「下級生産要素—inferior production factor」と呼び、下級要素でない生産要素は「正常生産要素—normal production factor」と呼ぶ。

参考文献

[1] Berge, C., *Topological Spaces*, London: Oliver&Boyd (1963) (Republication available from Dover.)

[2] Mas-Colell, A., Whinston, M.D., Green, J.R., *Microeconomic Theory*, Oxford: Oxford University Press (1995)

[3] Varian, H.R., *Microeconomic Analysis*, 3rd ed., New York: Norton (1992)

[4] 神谷和也・浦井憲, 「経済学のための数学入門」, 東京大学出版会 (1996)