§C．消費者行動の理論

§C.1 消費選択における物理的・経済的制約

定義C.1(消費可能集合－consumption set)…物理的制約

$$\mathbf{X} = R_{+}^{m}$$

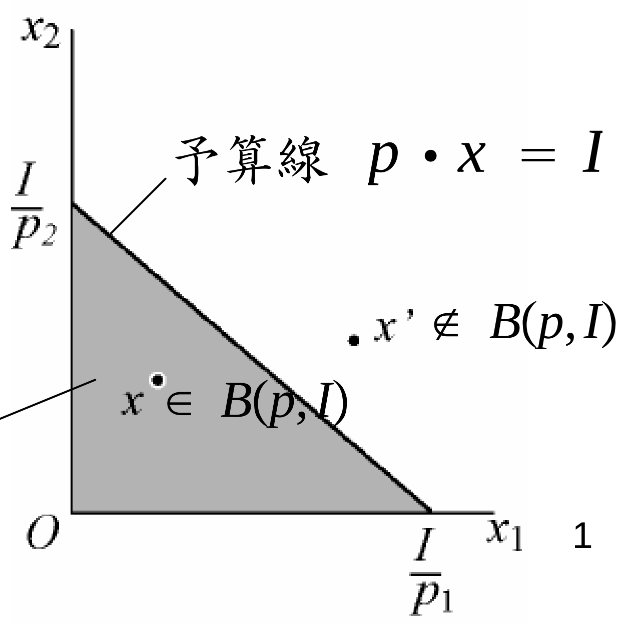
定義C.2(消費計画－consumption plan)

$$x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{X}$$

定義C.3(予算集合－budget set)…経済的制約

与件 $\begin{cases} p = (p_1, \ldots, p_m) \gg 0 \\ I > 0 \end{cases}$

$$B(p, I) \equiv \{x \in \mathbf{X} | p \cdot x \leq I\}$$



定義C.4(選好関係－preference relation）任意の２消費計画間の選好関係：

(i) 弱い意味の選好－weak preference

$$x \succeq x' \Leftrightarrow \text{「より好む」か「無差別」}$$

(ii) 強い意味の選好－strong preference

$$x \succ x' \Leftrightarrow \text{「より好む」}$$

(iii) 無差別－indifference

$$x \sim x' \Leftrightarrow [x \succeq x' \text{かつ} x' \succeq x]$$

x

定義C.5（合理的選好－rational preference)

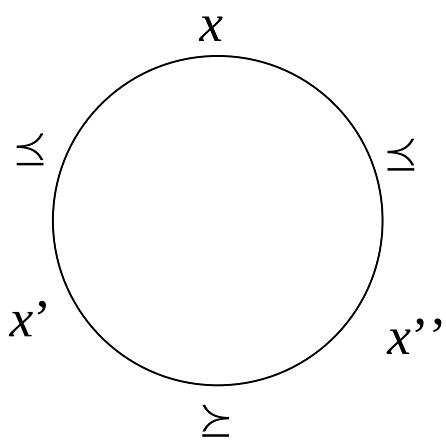
(i)完備性－completeness

$$x \succeq x' \quad \text{または} \quad x' \succeq x$$

(ii)推移性－transitivity

$$x \succeq x' \text{かつ} x' \succeq x'' \Rightarrow x \succeq x''$$

推移性が満たされない場合



事実C.1（合理的選好の性質)

(i) $\succ$ $\begin{cases} \text{非反射性－irreflexivity：} x \succ x \text{ は成立しない} \\ \text{推移性－transitivity：} \quad x \succ y \text{かつ} y \succ z \;\Rightarrow\; x \succ z \end{cases}$

(ii) $\sim$ $\begin{cases} \text{反射性：} \quad x \sim x \\ \text{推移性：} \quad x \sim y \text{かつ} y \sim z \;\Rightarrow\; x \sim z \end{cases}$

(iii) $x \succ y \succeq z \;\Rightarrow\; x \succ z$

選好の合理性＝(i)完備性＋(ii)推移性

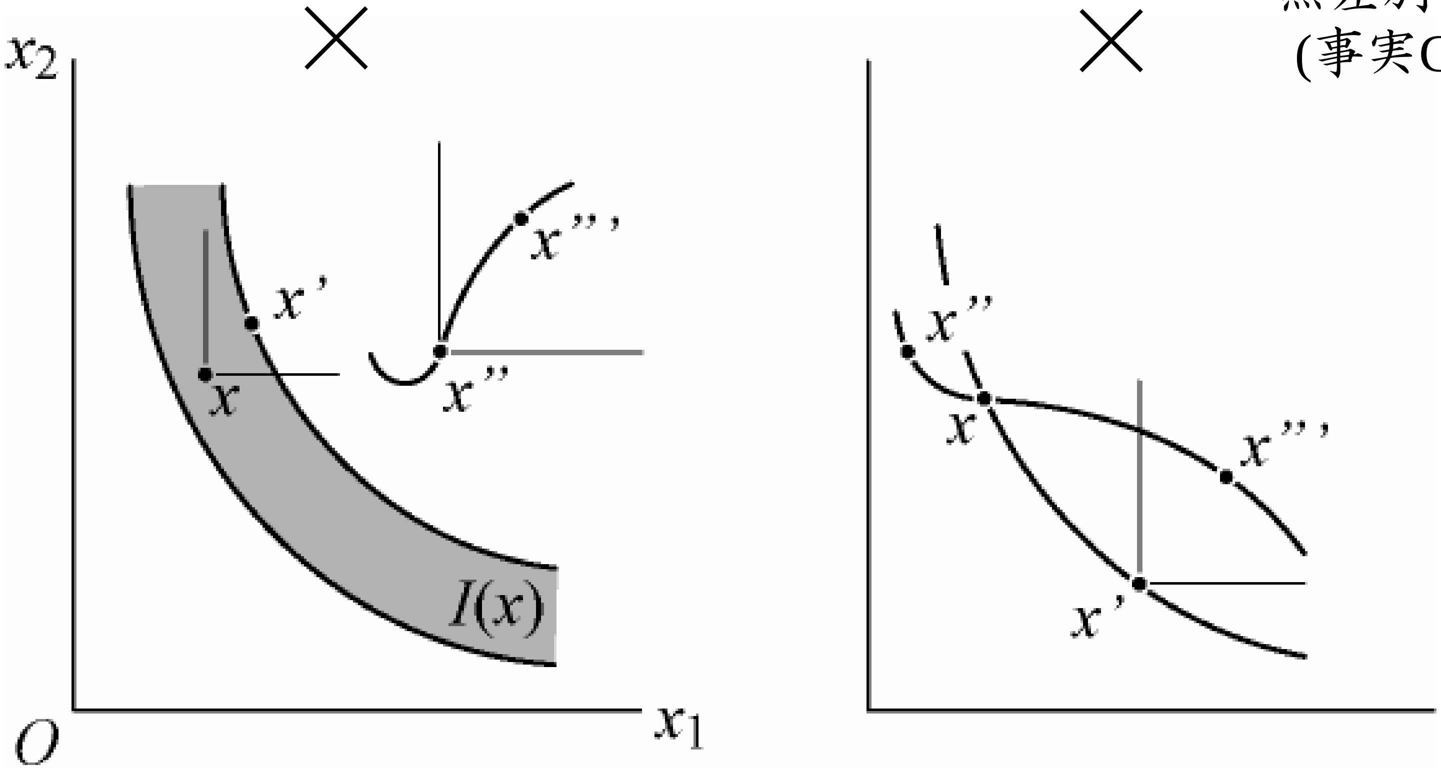
⇓

・有限個の選択肢に対して「最善」が存在する
・選好関係は比較の経路に依存しない

定義C.6 (欲求に関する仮定)

(i)単調性―monotonicity： $x \gg x' \Rightarrow x \succ x'$

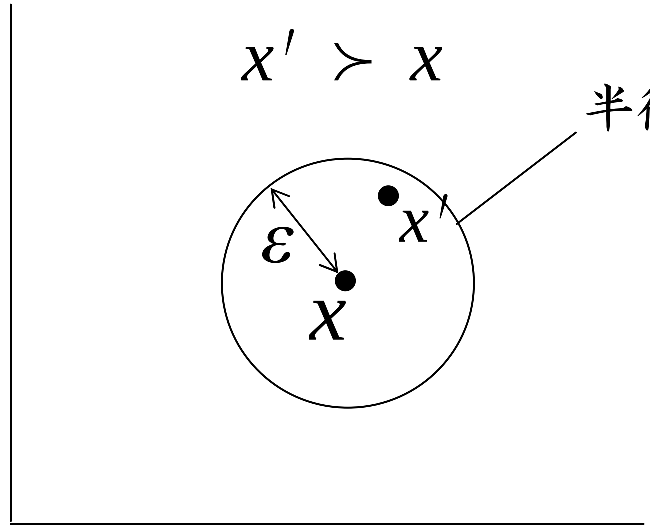
無差別集合 $I(x) \equiv \{x' \in R^2_+ | x' \sim x\}$ → 右下がりの交わらない無差別曲線
(事実C.4)



(a) (b)

(ii)強い単調性―strong monotonicity：$x \geq x'$かつ$x \neq x' \Rightarrow x \succ x'$

(iii) 局所的非飽和性－local nonsatiation



半径ε >0の近傍

$$\left.\begin{array}{c} |x' - x| < \varepsilon \\ x' \succ x \end{array}\right\} \text{なる } x' \in \mathbf{X} \text{ 有り}$$

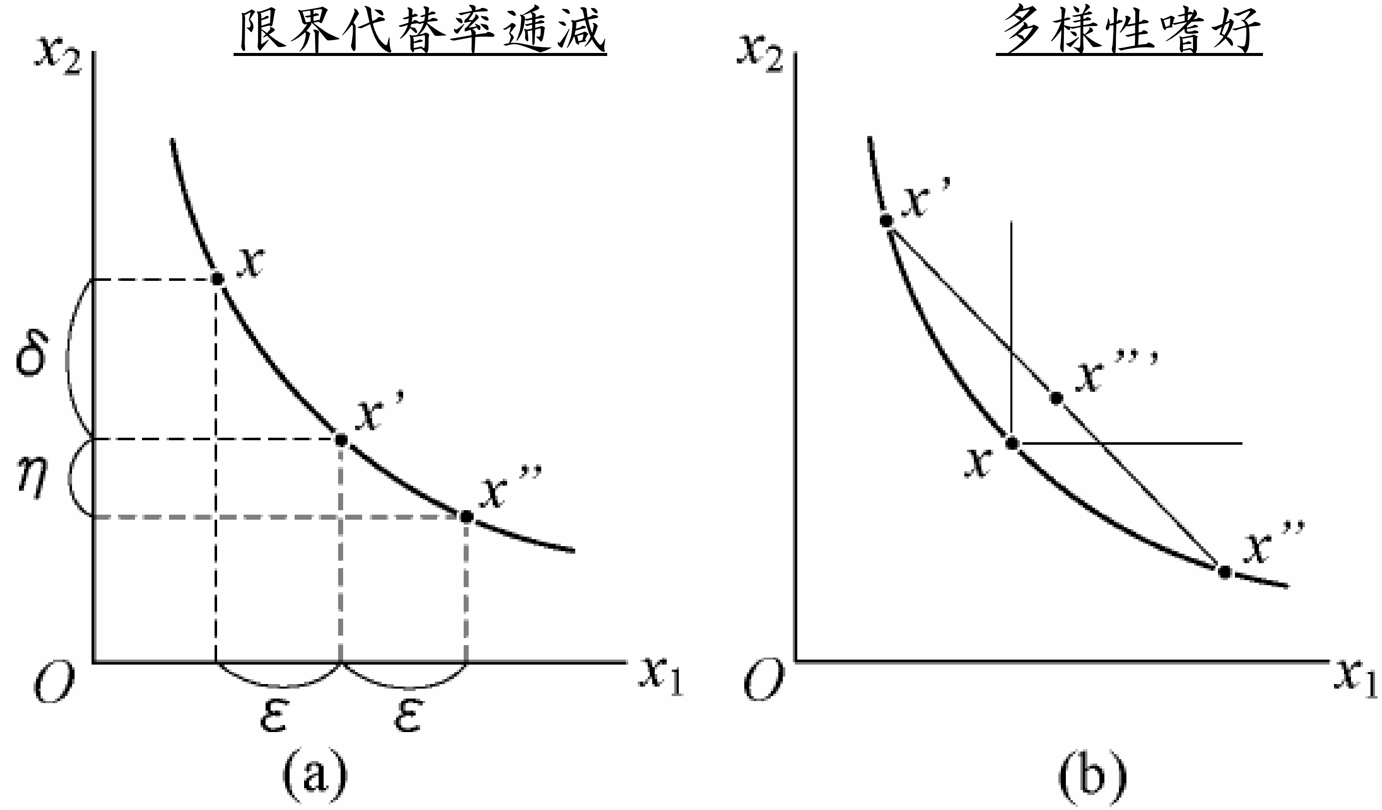
事実C.2

単調性⇒局所非飽和

定義C.7 (選好の凸性－convexity）

$$
\left.\begin{array}{l} x \succsim x'' \\ x' \succsim x'' \end{array}\right\} \xrightarrow{\ t \,\in\, (0,1)\ } \begin{cases} \text{(i) 凸性} \quad tx + (1-t)x' \succsim x'' \\ \text{(ii) 強い凸性} \quad tx + (1-t)x' \succ x'' \end{cases}
$$

凸選好のインプリケーション



定義C.8 (選好の連続性－continuity）

少なくともxと無差別

$$P(x) \equiv \{x' \in \mathbf{X} | x' \succeq x\}$$

閉集合

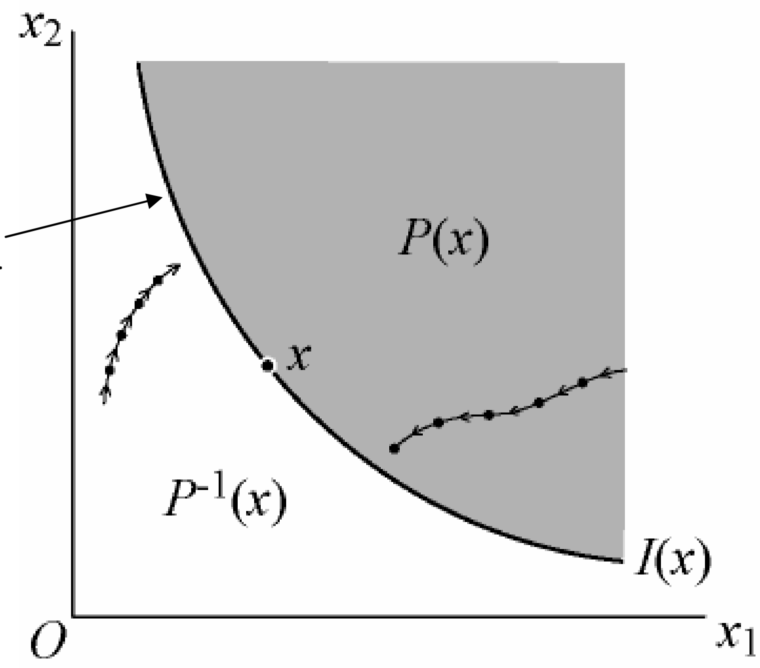
高々xと無差別

$$P^{-1}(x) \equiv \{x' \in \mathbf{X} | x \succeq x'\}$$

単調性の下での$P(x)$と$P^{-1}(x)$

無差別集合

$$I(x) \equiv \{x' \in \mathbf{X} | x' \sim x\}$$



§C.3 効用関数－utility function

定義C.9（効用関数）

選好関係：$\succeq$

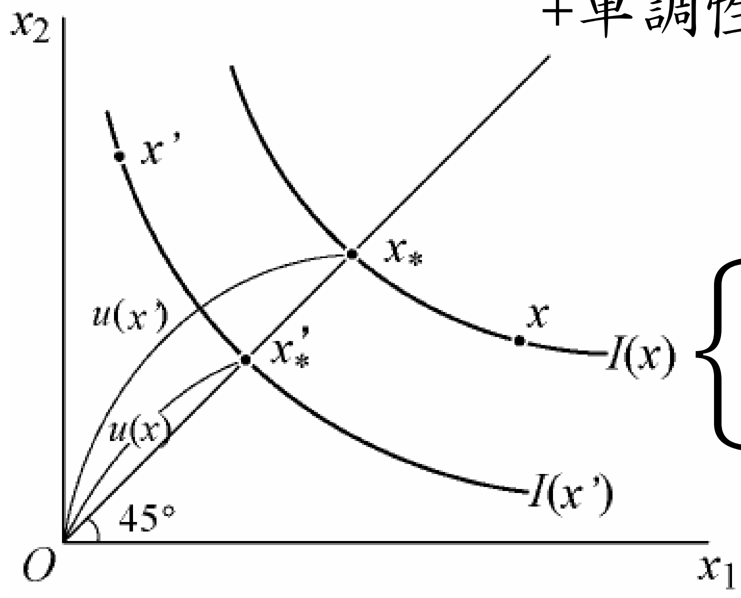
関数：$u : \mathbf{X} \to R$

$$u(x) \geq u(x') \Leftrightarrow x \succeq x'$$

事実C.5（効用関数の存在－existence of utility function）

選好の合理性＋連続性⇒連続な効用関数の存在

+単調性



無差別曲線
交わらない
右下がり

注意C.1

uが効用関数⇒ $U(x) \equiv \phi(u(x))$も効用関数

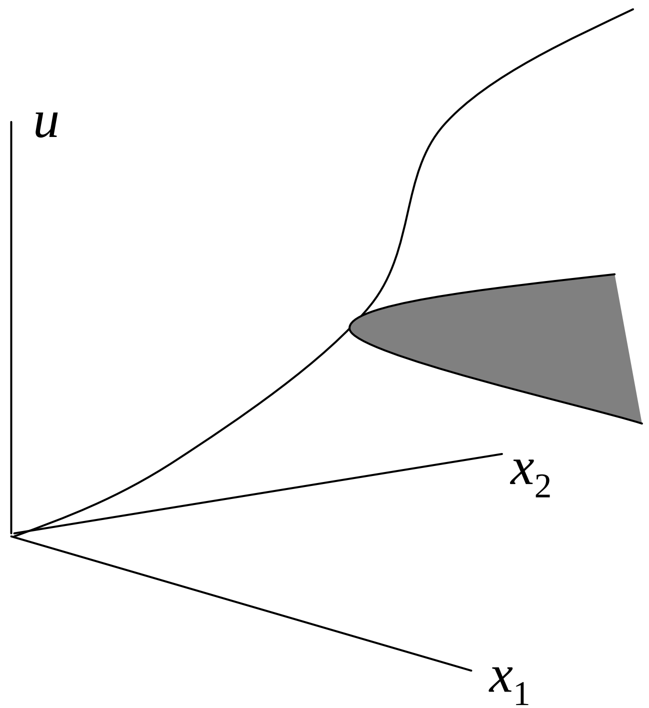
増加関数による単調変換

事実C.6（凸選好と効用関数の準凹性)

選好：合理性＋連続性＋単調性＋凸性（強凸性）

↓

効用関数：準凹（強準凹）



定義C.10（限界効用）

第i財消費量の限界的な増加

$$\Big\downarrow \; \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$$

効用の増加量？

(第 i 財の増加量一単位当たり)

定義C.11（限界代替率)

$$MRS_{ij}(x) \equiv \frac{\partial u(x)/\partial x_i}{\partial u(x)/\partial x_j}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dx_j = 0, \quad dx_k = 0 \; \forall k \neq i, j$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} dx_i(x_j) + \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dx_j = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dx_i(x_j)}{dx_j} = -\frac{\partial u(x)/\partial x_i}{\partial u(x)/\partial x_j} \equiv MRS_{ij}$$

§C.4 効用最大化問題－utility maximization problem

以下、合理性・連続性・局所非飽和性を常に仮定

(UMP) $$v(p, I) \equiv \max_{x \in B(p,I)} u(x)$$

間接効用関数

$$L(x, \lambda) = u(x) + \lambda(I - p \cdot x)$$

内点解

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u(x^*) - \lambda^* p_i = 0$$

所得の限界効用
－marginal utility of income

第i財消費量の限界的増加による効用増分
↓

$$\frac{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i}}{p_i} = \lambda^*$$

第i財価格

$$I - p \cdot x^* \geq 0$$

$$\lambda^*(I - p \cdot x^*) = 0$$

局所非飽和

$$p \cdot x^* = I$$

$$\lambda^* > 0$$

財i,j間限界代替率 $$= \frac{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i}}{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j}} = \frac{p_i}{p_j}$$

端点解の場合

$$\frac{\partial}{\partial x_i} L(x^*, \lambda^*) \leq 0 \longrightarrow \underbrace{\frac{\frac{\partial}{\partial x_i} u(x^*)}{p_i}}_{\text{第 i 財の消費増加を介した所得の限界効用}} \leq \lambda^*$$

第 i 財の消費増加を介した
所得の限界効用

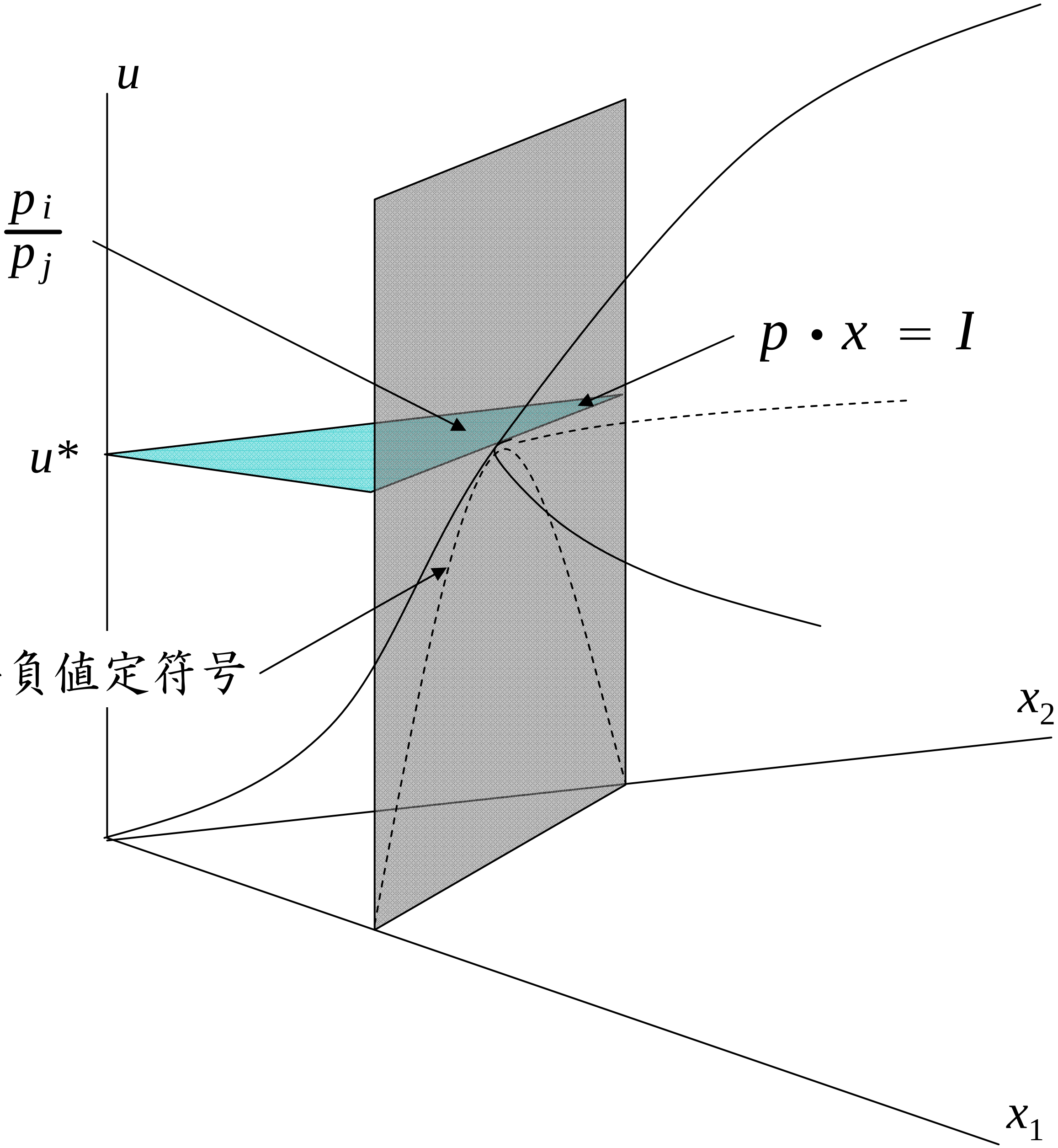
最適における
所得の限界効用

1 階条件(内点)

$$\frac{\dfrac{\partial u(x^*)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u(x^*)}{\partial x_j}} = \frac{p_i}{p_j}$$

2階条件：

$D_x^2 u(x^*)$ ：半負値定符号



定義C.12（マーシャルの需要関数－Marshallian demand function)

UMPの最適消費ベクトル$x(p,I)$をマーシャルの需要関数と呼ぶ

事実C.7 マーシャルの需要関数 $x(p,I)$ の性質

(i) (p,I)について０次同次　　∵予算集合に変化なし

(ii) 予算の完全消化　$p \cdot x = I$　　∵局所非飽和

(iii) 凸選好(準凹効用関数) ⇒ 凸集合

強凸選好(強準凹効用関数) ⇒ 関数(１要素)

※価格効果の対称性は一般的には成立しない

↑

所得制約→予算集合の変化→所得効果：財により異なる(非対称性)

c.f. 利潤最大化問題

事実C.8(間接効用関数 $v(p, I)$ の性質)

(i) (p,I)について０次同次 ∵予算集合不変

(ii) pについて非増加 ∵予算集合縮小

(iii) Iについて(強い意味で)増加 ∵局所非飽和

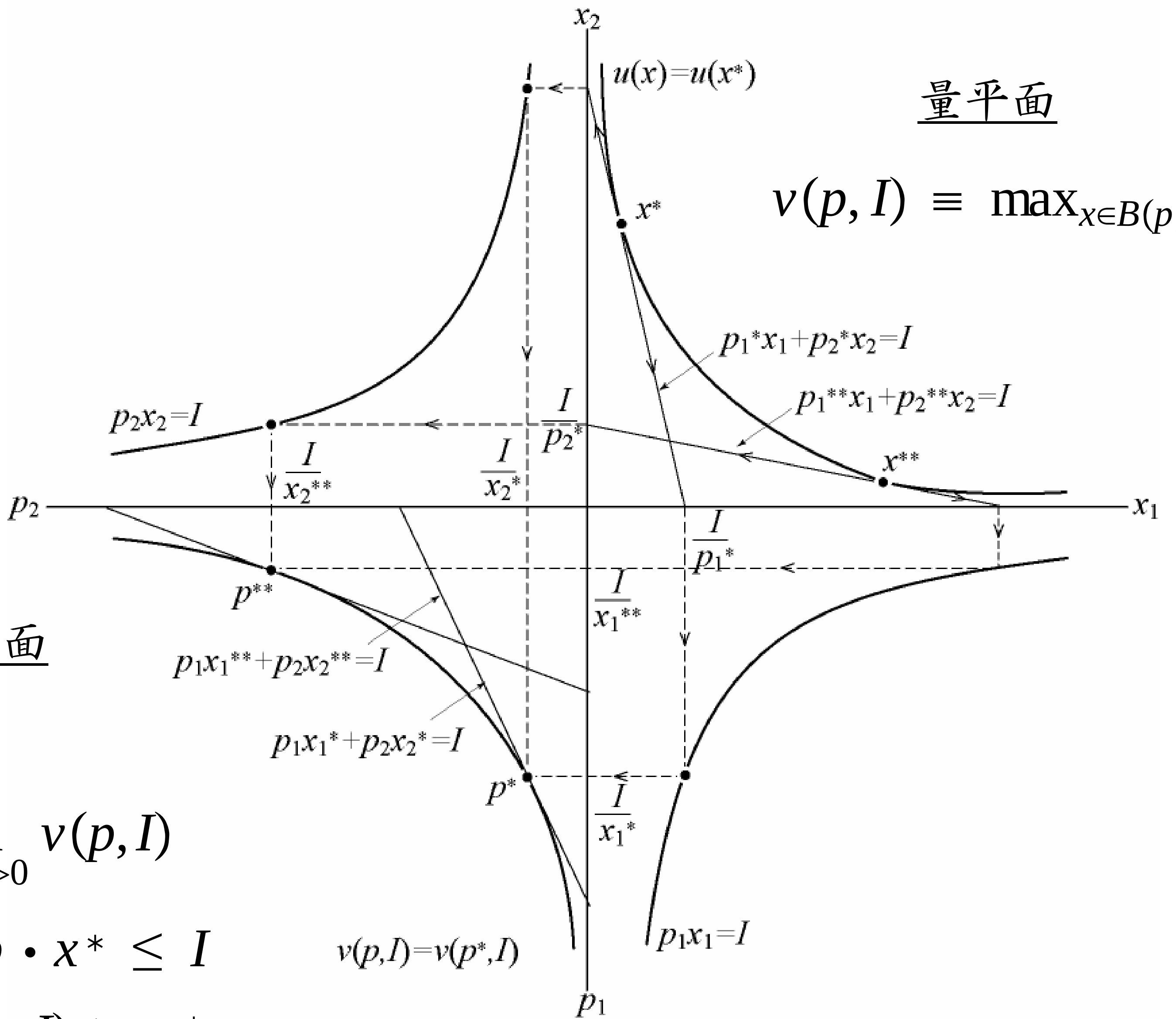
(v) p, Iについて連続 ∵最大値定理(Berge)

ウィリアム・ノヴシェク(著), 奥口孝二・小林信治(訳)
「経済数学：基礎と応用」多賀出版, 1996年: p. 67.

無差別曲線と間接無差別曲線（所得I所与)

量平面

$$v(p,I) \equiv \max_{x\in B(p,I)} u(x)$$



価格平面

双対問題：

$$\min_{p\gg 0, I>0} v(p,I)$$

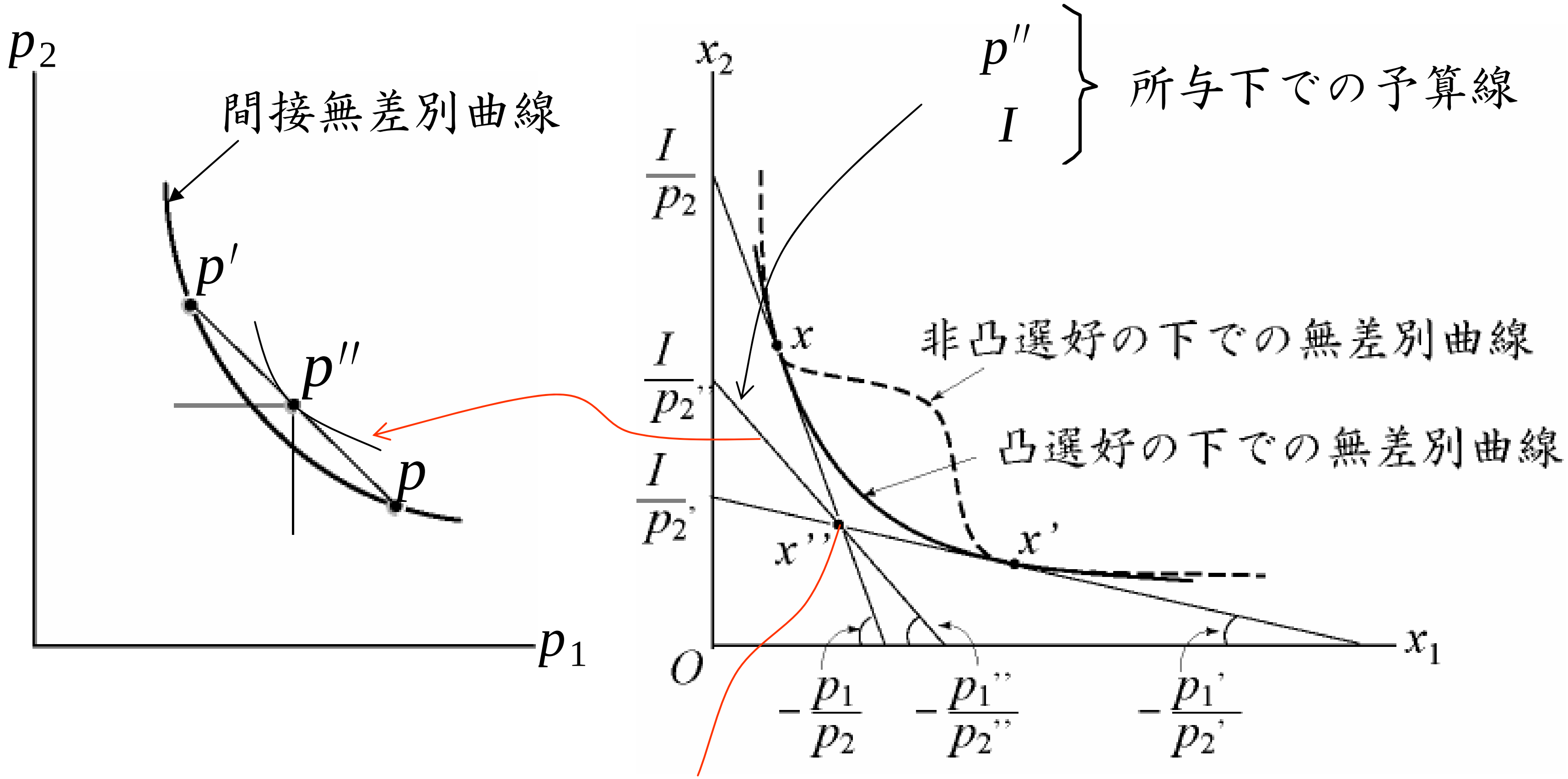
$$s.t. \quad p\cdot x^* \le I$$

$$v(p,I) \ge u^*$$

(iv) pの準凸関数－quasi convex function

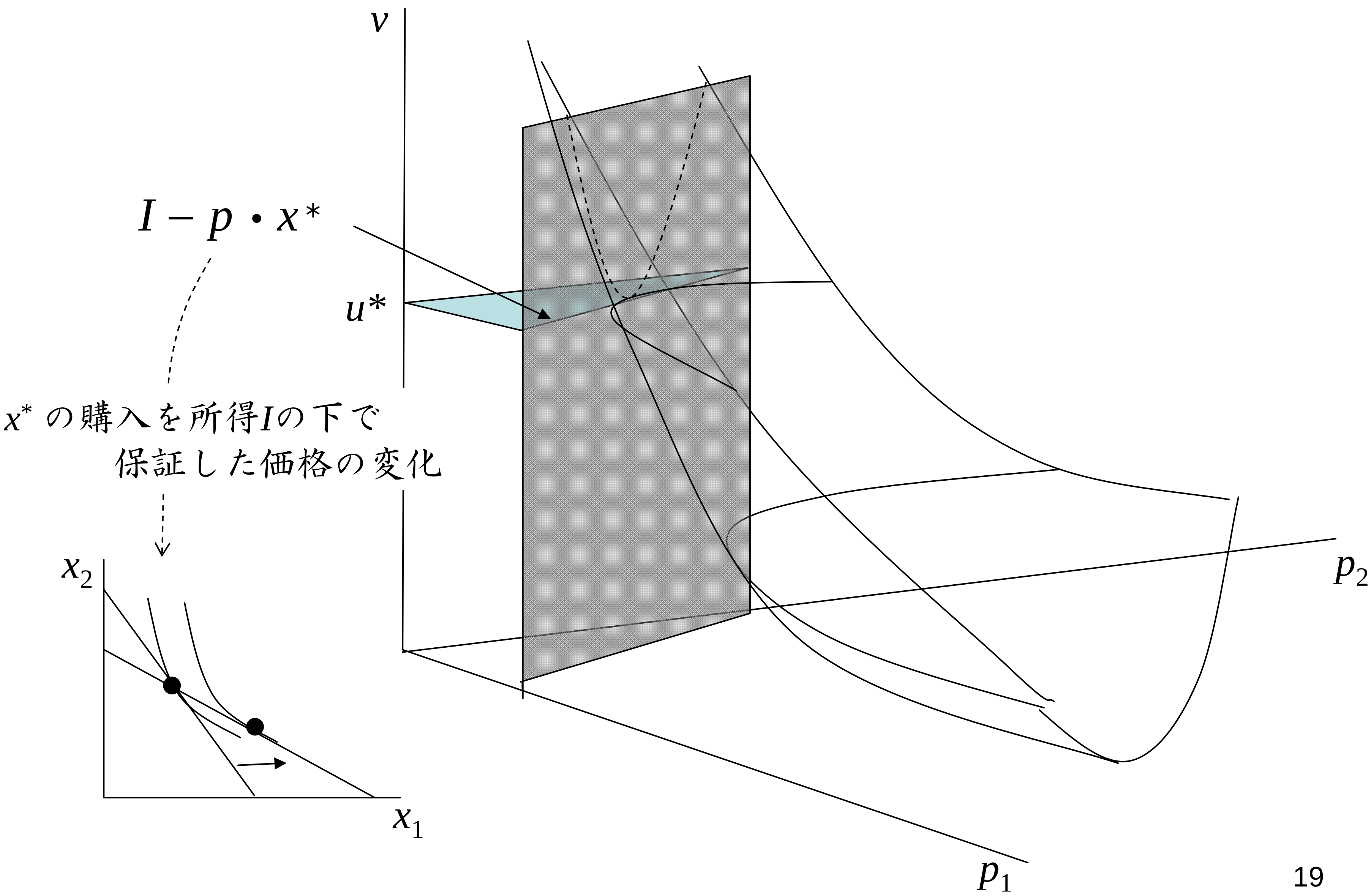
※効用関数の準凹性に依存しない

$$p'' = tp + (1 - t)p''$$



$$x \sim x' \succeq x''$$

間接効用関数（Iを所与とした図）



§C.5 支出最小化問題－expenditure minimization problem

支出関数－expenditure function

$$e(p,u) \equiv \min_{x \in \mathbf{X}} p \cdot x$$

$$s.t. \quad u(x) \geq u$$

<u>支出関数 $e(p,u)$ の性質</u>…生産における費用関数の性質と同様

(i) pについて１次同次　　∵最適消費計画不変
(ii) Pについて非減少
(iii) u について強い意味で増加　∵局所非飽和
(iv) pの凹関数
(v) p , uに連続

定義C.12（補償需要関数－compensated demand function）

支出最小化問題の最適解：$h(p,u)$

事実C.14（シェパードの補題）

$$h_i(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}, \quad i = 1, \ldots, m$$

事実C.15（補償需要関数 $h(p,u)$ の性質）

(i) (p,u)について０次同次
(ii) $D_p h(p,u)$：対称半負値定符号（補償需要の法則）

事実C.16（補償需要の凸性）

(i) 凸選好(準凹効用関数) $\Rightarrow$ 凸集合
(ii) 強凸選好(強準凹効用関数) $\Rightarrow$ 関数(１要素)

支出最小化問題

$$e(p,u) \equiv \min_{x \in \mathbf{X}} p \cdot x \quad \xleftrightarrow{\text{双対問題}} \quad \max_{p \gg 0} e(p,u)$$

$$s.t. \quad u(x) \geq u \qquad\qquad s.t. \quad p \cdot x \leq \bar{e}$$

$$\updownarrow \text{双対問題}$$

効用最大化問題

$$\min_{p \gg 0, I > 0} v(p,I) \quad \xleftrightarrow{\text{双対問題}} \quad v(p,I) \equiv \max_{x \in B(p,I)} u(x)$$

$$s.t. \quad p \cdot x^* \leq I$$

$$v(p,I) \geq u^*$$

§C.6 ロワの恒等式

事実C.18（ロワの恒等式－Roy's Identity）

局所非飽和・効用関数の連続性・微分可能性

$$\Big\downarrow$$

$$x_i(\bar{p},\bar{I}) = -\frac{\frac{\partial v(\bar{p},\bar{I})}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(\bar{p},\bar{I})}{\partial I}}$$

$$(p^*,I^*) \xrightarrow{\text{効用最大化}} (x^*,u^*)$$

$$u^* \equiv v(p,e(p,u^*))$$

$$\Big\downarrow \ p_i \text{ で微分}$$

$$0 = \frac{\partial v(p^*,I^*)}{\partial p_i} + \frac{\partial v(p^*,I^*)}{\partial I}\frac{\partial e(p,u^*)}{\partial p_i}$$

$$\text{シェパードの補題} \ \Big\downarrow$$

$$h_i(p^*,u^*) \equiv x(p^*,I^*) = -\frac{\frac{\partial v(p^*,I^*)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p^*,I^*)}{\partial I}}$$

$$v(p,I) \equiv u(x(p,I))$$

$$\frac{\partial v(p,I)}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^m \underbrace{\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}}_{=\lambda p_i} \frac{\partial x_i}{\partial p_j}$$

$$p \cdot x(p,I) = I$$

p_jで微分

$$x_j(p,I) + \sum_{i=1}^m p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_j} = 0$$

$$\frac{\partial v(p,I)}{\partial p_j} = -\lambda x_j(p,I)$$

$$\frac{\partial v(p,I)}{\partial I} = \lambda \sum_{i=1}^m p_i \frac{\partial x_i}{\partial I}$$

$$p \cdot x(p,I) = I$$

$$\sum_{i=1}^m p_i \frac{\partial x_i}{\partial I} = 1$$

$$\frac{\partial v(p,I)}{\partial I} = \lambda$$

効用最大化問題の双対問題とロワの恒等式

$$\min_{p \gg 0, I>0} v(p,I)$$

$$s.t. \quad p \cdot x^* \le I$$

$$v(p,I) \ge u^*$$

→ラグランジュ関数：

$$L = v(p,I) + \lambda_I (I - p \cdot x^*) + \lambda_u (u^* - v(p,I))$$

$$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = I$$

－平面上での変化

FOC:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(p,I)}{\partial p_i} - \lambda_I^* x_i^* - \lambda_u^* \dfrac{\partial v(p,I)}{\partial p_i} = 0 \\ \dfrac{\partial v(p,I)}{\partial I} + \lambda_I^* - \lambda_u^* \dfrac{\partial v(p,I)}{\partial I} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial v(p,I)}{\partial p_1} dp_1 + \cdots + \frac{\partial v(p,I)}{\partial p_m} dp_m + \frac{\partial v(p,I)}{\partial I} \underline{dI} = 0$$

1次の効果

$$\frac{\partial v(p,I)}{\partial I}(x_1^* dp_1 + \cdots + x_m^* dp_m) =$$

$$-\left[\frac{\partial v(p,I)}{\partial p_1} dp_1 + \cdots + \frac{\partial v(p,I)}{\partial p_m} dp_m\right]$$

$$x_i^* = -\frac{\frac{\partial v(p,I)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p,I)}{\partial I}}$$

$$dp_j = 0 \quad \forall j \ne i$$

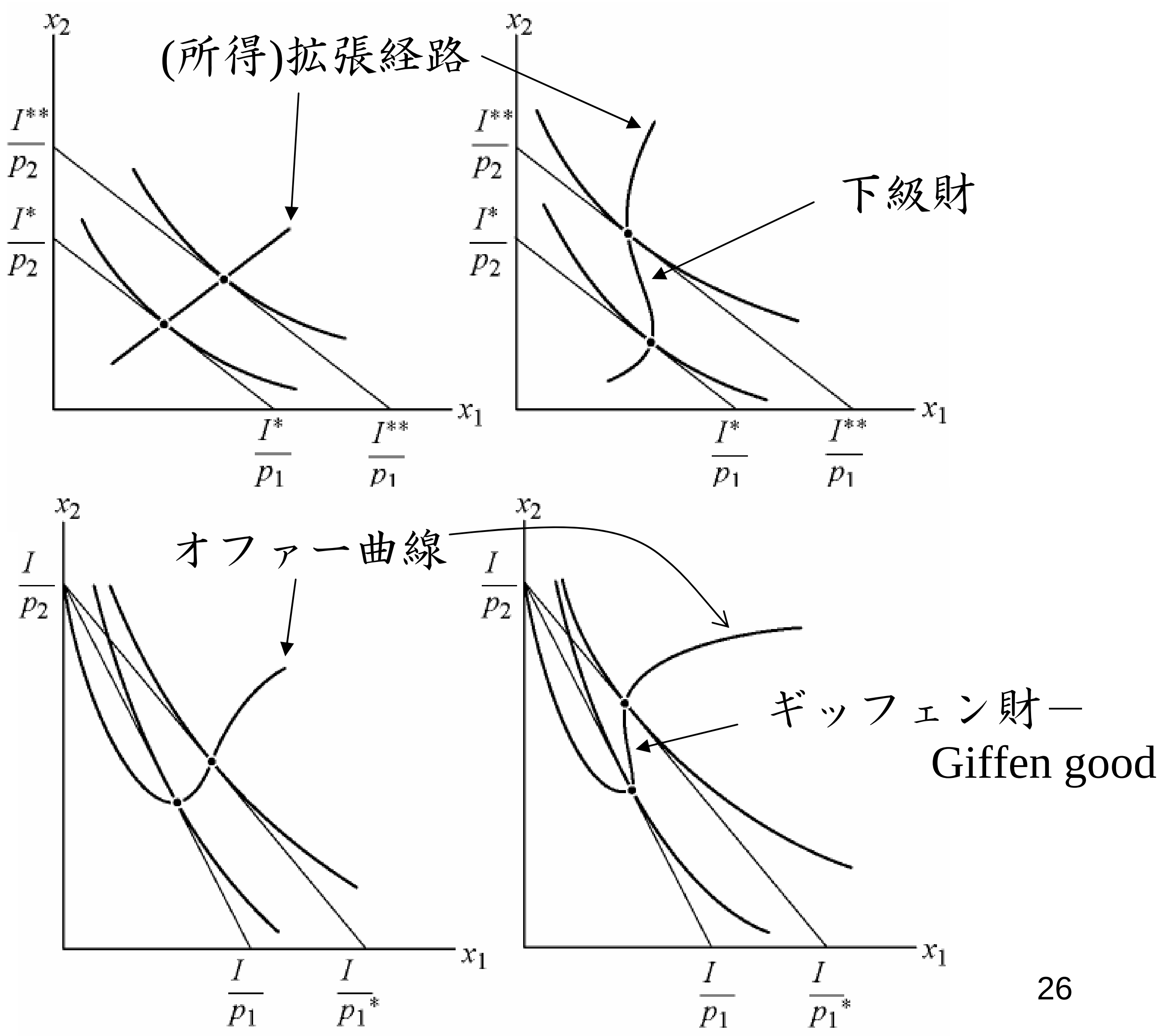
$$\longrightarrow x_1^* dp_1 + \cdots + x_m^* dp_m = \frac{-1}{\frac{\partial v(p,I)}{\partial I}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial v(p,I)}{\partial p_i} dp_i$$

所得効果で正規化

§C.7 スルツキー方程式－Slutsky equation

価格所与・所得変化

所得固定・価格変化



事実C.19（スルツキー方程式－Slutsky equation)

$$\frac{\partial x_j(p,I)}{\partial p_i} = \underbrace{\frac{\partial h_j(p,v(p,I))}{\partial p_i}}_{\text{代替効果}} - \underbrace{\frac{\partial x_j(p,I)}{\partial I} x_i(p,I)}_{\text{所得効果}}$$

$$h_j(p,u^*) \equiv x_j(p,e(p,u^*))$$

x^*： (p^*,I^*) 下での効用最大化解

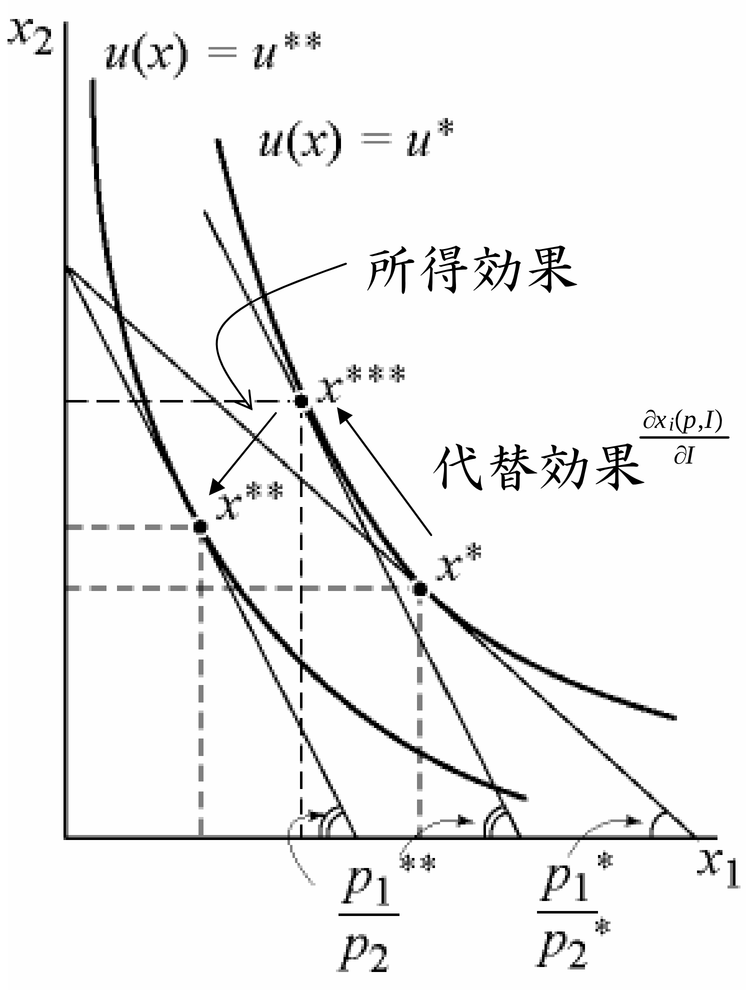
$u^* = u(x^*)$

シェパードの補題

$$\frac{\partial h_j(p^*,u^*)}{\partial p_i} = \underbrace{\frac{\partial x_j(p^*,I^*)}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(p^*,I^*)}{\partial I} x_i^*}_{s_{ji}(p,I)}$$

スルツキー(代替)行列： $S(p,I) = \begin{bmatrix} s_{11}(p,I) & \cdots & s_{1m}(p,I) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1}(p,I) & \cdots & s_{mm}(p,I) \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial x_j(p,I)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_j(p,v(p,I))}{\partial p_i} - \frac{\partial x_j(p,I)}{\partial I} x_i(p,I)$$



正常財

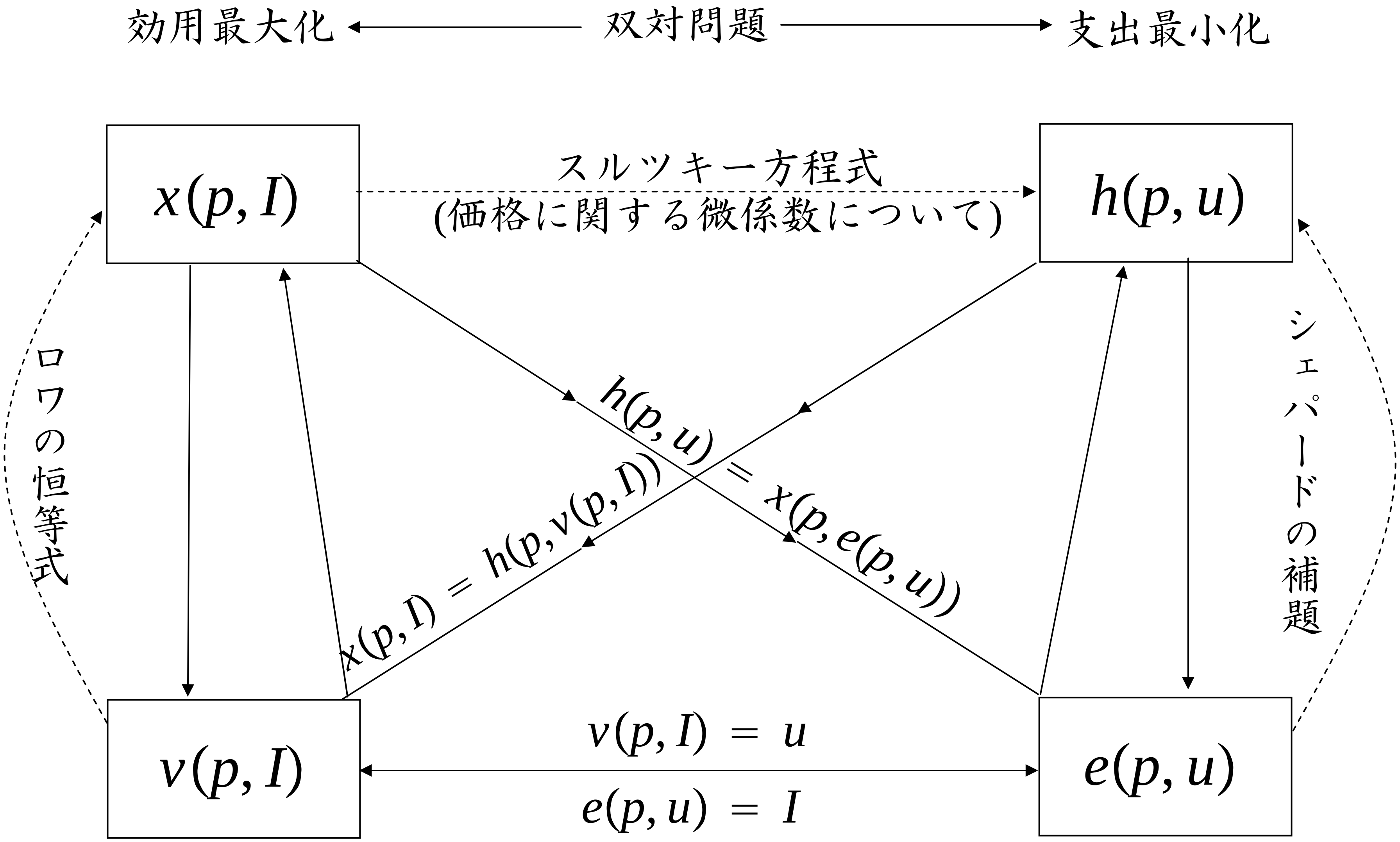
↓

$$\frac{\partial x_i(p,I)}{\partial I} \geq 0$$

↓ $\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_i} \leq 0$

$$\frac{\partial x_i(p,I)}{\partial p_i} \leq 0$$

ギッフェン財になり得ない


効用最大化
双対問題
支出最小化
$x(p, I)$
スルツキー方程式
(価格に関する微係数について)
$h(p, u)$
ロワの恒等式
シェパードの補題
$h(p, u) = x(p, e(p, u))$
$x(p, I) = h(p, v(p, I))$
$v(p, I)$
$v(p, I) = u$
$e(p, u) = I$
$e(p, u)$

§C.9 顕示選好理論

市場価格
需要行動
(観察可能)

選好の $\left\{\begin{array}{l}\text{一貫性}\\\text{合理性}\end{array}\right\}$ に関する公準(公理)

選好関係
(観察不可能)

顕示選好理論

効用関数　これまでの理論構築

乖離？

需要の理論

定義C.16（顕示選好の弱公準－Weak Axiom of Revealed Preference / WA）

任意の (p, I)と(p', I')

$$\downarrow$$

$$[p \cdot x(p', I') \leq I \text{ かつ } x(p', I') \neq x(p, I)] \Rightarrow p' \cdot x(p, I) > I'$$

<u>ＷＡの解釈</u>

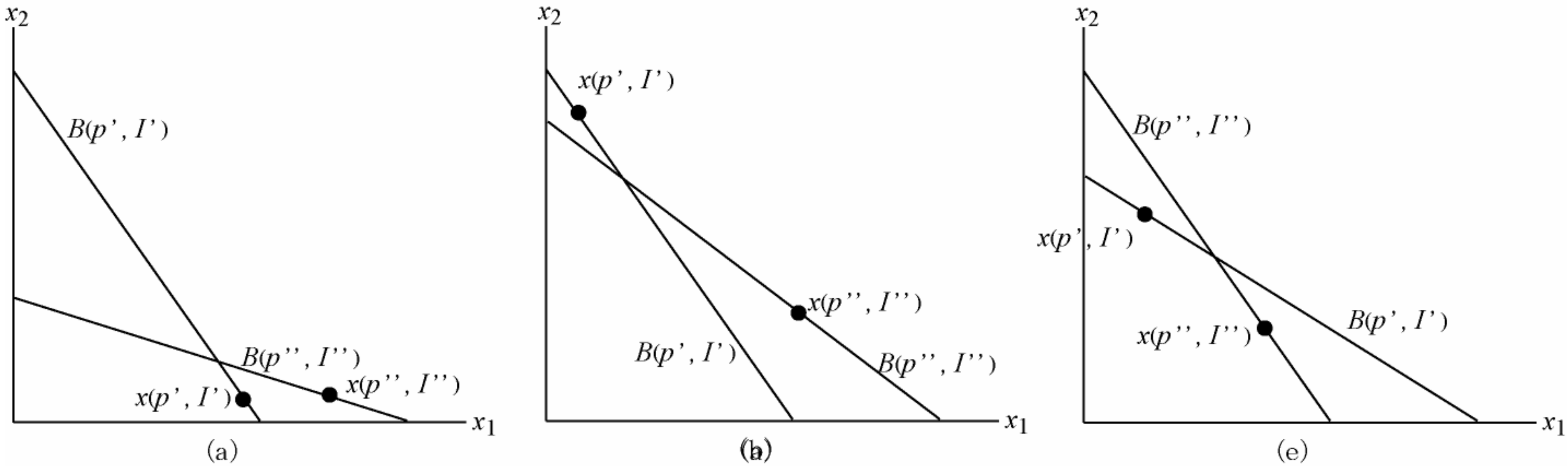
(p,I) の下で$x(p',I')$を購入可能

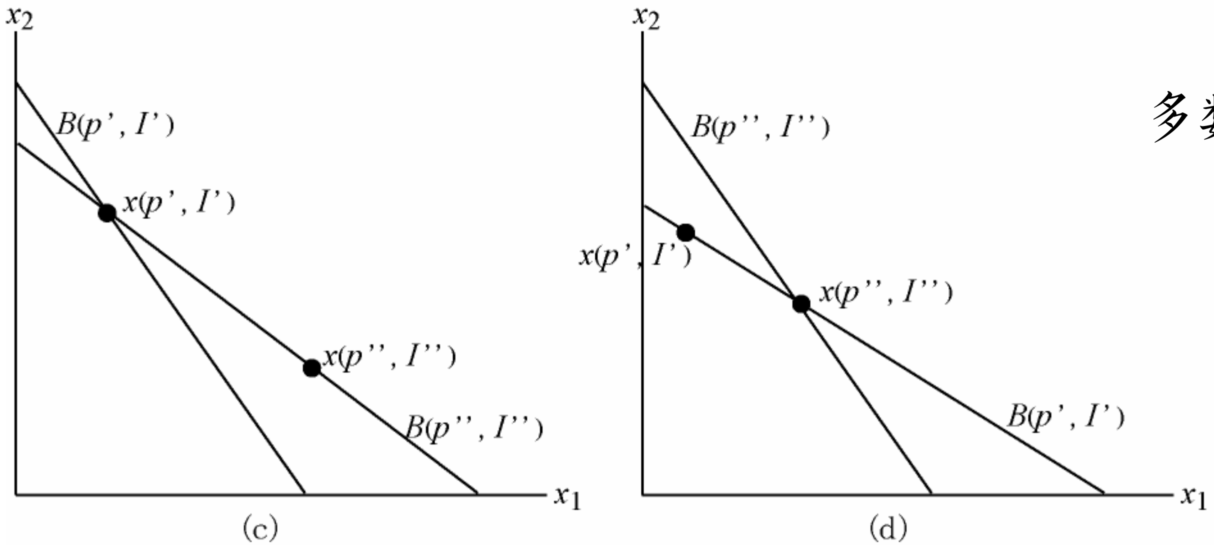
⇓

$x(p,I)$ は $x(p',I')$ より好まれるはず

⇓

(p',I')の下では $x(p,I)$ は購入不可能であるはず





多数の消費パターンの比較

⇓

無差別曲線の近似

事実C.20（WAと補償需要法則）

$x(p, I)$：０次同次＋予算制約等号成立

$(p', I') = (p', p' \cdot x(p, I))$

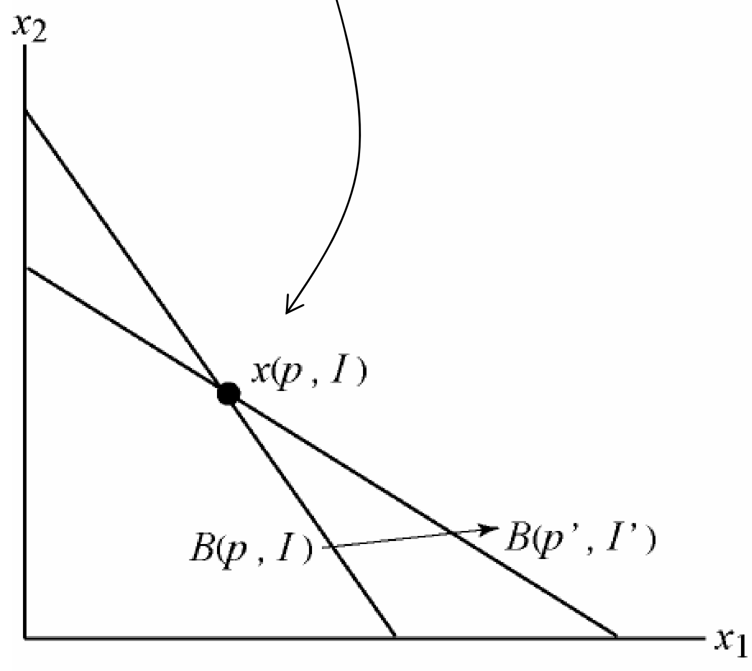
$x(p, I)$ の購入可能性を保証した価格・所得変化

WA

$\Updownarrow$

$(p' - p) \cdot [x(p', I') - x(p, I)] \leq 0$

価格↑⇒需要↓



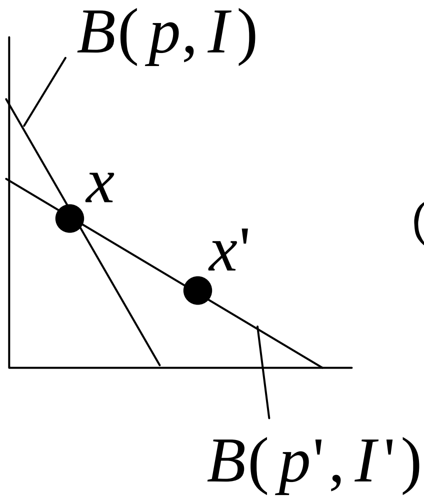
WA⇒補償需要の法則（ $x(p',I') \neq x(p,I)$ の場合）

WA

$$\begin{cases} p'\cdot x(p,I) \leq I' \\ x(p,I) \neq x(p',I') \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$p\cdot x(p',I') > I$$



補償需要の法則

$$I' = p' \cdot x(p,I)$$

$$\Downarrow$$

$$(p'-p)\cdot[x(p',I')-x(p,I)] \leq 0$$

$$p' \cdot [x(p',I') - x(p,I)] = 0$$

所得補償 : $p' \cdot x(p',I') = p' \cdot x(p,I) = I'$

(p',I')下ではどちらも購入可能

$$p \cdot [x(p',I') - x(p,I)] > 0 \quad \because \text{WA}$$

$$p \cdot x(p',I') > I = p \cdot x(p,I)$$

$$\longrightarrow p' \cdot [x(p',I') - x(p,I)] - p \cdot [x(p',I') - x(p,I)] < 0$$

補償需要法則⇒ＷＡ （ $x(p',I') \neq x(p,I)$ の場合）

補償需要の法則

$$I' = p' \cdot x(p,I)$$

$$\Downarrow$$

$$(p'-p)\cdot[x(p',I')-x(p,I)] \leq 0$$

ＷＡ

$$\begin{cases} p' \cdot x(p,I) \leq I' \\ x(p',I') \neq x(p,I) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$p \cdot x(p',I') > I$$

ＷＡが成立しないとする

$$p \cdot x(p',I') \leq I$$

$$p' \cdot [x(p',I') - x(p,I)] = 0$$

所得補償：$p' \cdot x(p',I') = p' \cdot x(p,I) = I'$

$$p \cdot [x(p',I') - x(p,I)] \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$p' \cdot [x(p',I') - x(p,I)] - p \cdot [x(p',I') - x(p,I)] \geq 0$ ：補償需要法則に矛盾

事実C.21 （WAと代替/スルツキー行列）

$x(p, I)$：０次同次＋予算制約等号成立＋WA

$$\Big\downarrow \text{微分可能性}$$

$S(p, I)$ ：半負値定符号　　←（支出最小化の２階条件)

$$s_{ij}(p, I) = \frac{\partial x_i(p,I)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,I)}{\partial I} x_j(p, I)$$

$$\text{価格の変化} \xrightarrow[dI = x(p,I)\cdot dp]{\text{所得補償：}} \text{需要の変化}$$

$$dx = D_p x(p,I)dp + D_I x(p,I)dI$$

$$= D_p x(p,I)dp + D_I x(p,I)[x(p,I)\cdot dp]$$

$$= [D_p x(p,I) + D_I x(p,I)x(p,I)^T]dp$$

$$= S(p,I)dp$$

補償需要の法則 $dp \cdot dx \leq 0$

$$dp \cdot S(p,I)dp \leq 0$$

スルツキー行列：半負値定符号

<u>標記の注意</u>

$$D_p x(p,I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(p,I)}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_m(p,I)}{\partial p_m} \end{bmatrix}$$

$$D_I x(p,I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(p,I)}{\partial I} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_m(p,I)}{\partial I} \end{bmatrix}$$

需要の価格・所得に関するゼロ次同次性

価格の比例的変化： $dp = tp \ \ (t > 0)$

$$\downarrow$$

所得補償： $dI = tI$

$$\downarrow$$

予算集合に変化無し： $B((1+t)p, (1+t)I) = B(p, I)$

$$\downarrow$$

需要に変化無し： $x((1+t)p, (1+t)I) = x(p, I)$

$$\downarrow$$

$$dx = 0$$

$$\downarrow$$

$$S(p, I)p = 0$$

$$\downarrow$$

スルツキー行列：負値定符号にはならない

命題C.1（ＷＡの必要十分条件）

$$\begin{cases} x(p,I)\text{の微分可能性} \\ x(p,I)\text{の０次同次性} \\ \text{予算制約等号成立：}p\cdot x=I \end{cases}$$

＋

$$\forall p \gg 0, I > 0$$

$$v\cdot S(p,I)v < 0, \quad \forall v \neq tp$$

任意定数

ヒックスとスルツキーの意味での所得補償とスルツキー行列

$$(p, I) \longrightarrow (p', I')$$

スルツキーの所得補償：初期の需要水準を保証

$$\Delta I_{Slutsky} = p' \cdot x(p, I) - I$$

ヒックスの所得補償：初期の効用水準を保証

$$\Delta I_{Hicks} = e(p', u) - I$$

$$\longrightarrow \quad \Delta I_{Slutsky} - \Delta I_{Hicks} = p' \cdot x(p, I) - e(p', u) \geq 0$$

$$\longrightarrow \quad \Delta I_{Hicks} \leq \Delta I_{Slutsky}$$

価格の微小変化： $dp = p' - p$

シェパードの補題

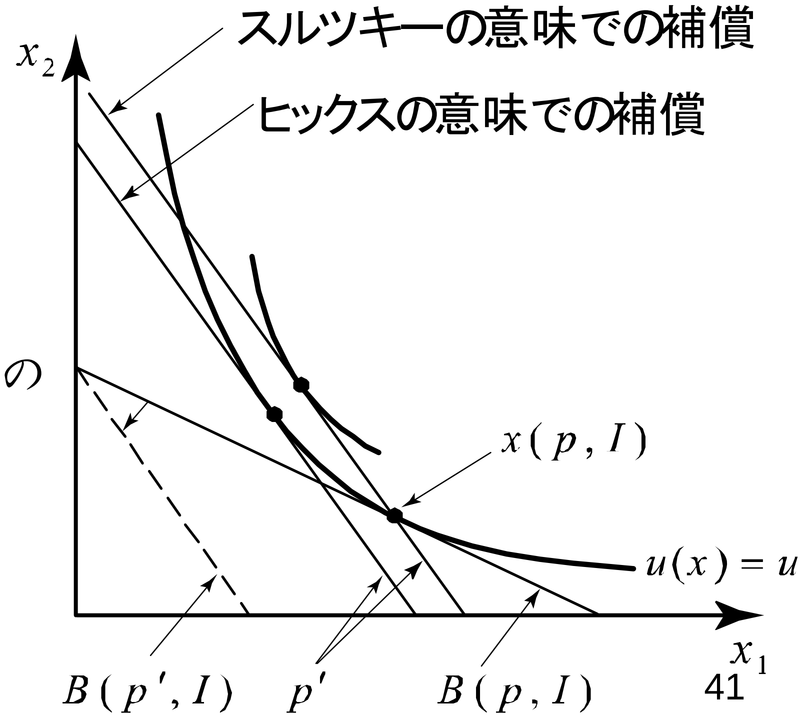
$$D_p e(p,u) = h(p,u) = x(p,I)$$

ヒックスの意味での所得補償

$$\begin{aligned} e(p',u) &= D_p e(p,u) \cdot dp + e(p,u) \\ &= h(p,u) \cdot dp + p \cdot h(p,u) \\ &= (dp + p) \cdot h(p,u) \\ &= p' \cdot x(p,I) \end{aligned}$$

スルツキーの意味での
所得補償

$$\Delta I_{Slutsky} = \Delta I_{Hicks}$$



市場価格
需要行動
(観察可能)

$x(p,I)$ の０次同次性
予算制約の等号成立
ＷＡ

選好関係
(観察不可能)

顕示選好理論

効用関数　これまでの理論構築

乖離？

需要の理論

$S(p,I)$ の対称性

i.e., 選好関係の推移性

定義C.17（顕示選好の強公準－Strong Axiom of Revealed Preference / SA）

$x(p^n, I^n) \neq x(p^{n+1}, I^{n+1}) \quad (n = 1, \ldots, N-1)$ であるような

任意の価格・所得ペアのリスト：

$$(p^1, I^1), \ldots, (p^N, I^N)$$

$$\downarrow$$

$p^1 \cdot x(p^1, I^1) \geq p^1 \cdot x(p^2, I^2)$ … x^2よりx^1

$p^2 \cdot x(p^2, I^2) \geq p^2 \cdot x(p^3, I^3)$ … x^3よりx^2

$\vdots$

$p^{N-1} \cdot x(p^{N-1}, I^{N-1}) \geq p^{N-1} \cdot x(p^N, I^N)$ … x^Nよりx^{N-1}

$\Rightarrow p^N \cdot x(p^1, I^1) > I^N$

… x^1は(p^N, I^N)下で購入不可

ＷＡとＳＡが要求する選好の一貫性

ＷＡ：任意の消費ベクトル・ペア間の一貫性
ＳＡ：任意数の消費ベクトル間での選好の非循環性

↓

選好関係の推移性

↓

$S(p,I)$ の対称性

事実C.22（ＳＡと合理的選好）

$x(p,I) \xrightarrow{\text{SA}}$ 整合する合理的選好関係 $\succeq$ の存在

§C.10 消費者の集計

§C.10.1 Gorman型効用関数

間接効用関数：$v_i(p, I_i) = a_i(p) + b(p) I_i$

消費者ID

ロワの恒等式

全消費者共通

$$x_i^j(p, I_i) = \underbrace{\alpha_i^j(p)}_{-\frac{\partial a_i(p)/\partial p_j}{b(p)}} + \underbrace{\beta^j(p)}_{-\frac{\partial b(p)/\partial p_j}{b(p)}} I_i$$

「代表的個人」の需要関数

$$X^j(p, I_1, \ldots, I_N) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^j(p) + \beta^j(p) \sum_{i=1}^N I_i$$

$$v\left(p, \sum_{i=1}^N I_i\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^N a_i(p) + b(p) \sum_{i=1}^N I_i}_{\text{集計してもGorman型}}$$

事実C.23（ホモセティック効用関数）

間接効用関数： $v(p, I) = V(p)I$

定義C.17（補償無しの需要法則－uncompensated law of demand / ULD）

個人 i の需要関数 $x_i(p,I_i)$ は補償無しの需要法則を満たす：

所得固定、価格は$p \to p'$へ変化

↓

$$(p' - p) \cdot [x_i(p', I_i) - x_i(p, I_i)] \leq 0 \quad \forall p, p' \gg 0, I > 0$$

（ $x_i(p', I_i) \neq x_i(p, I_i) \Rightarrow$強い意味の不等号）

個人の効用関数がホモセティック

↓

代表的個人の効用関数もホモセティック

↓

集計需要に関する補償無しの需要法則

注）ULDの十分条件

↑

MWG (Prop.4C3)

§C.10.2 準線形効用関数－quasi-linear utility function

$$U(x_0, x_1, \ldots, x_k) = x_0 + u(x_1, \ldots, x_k)$$

$$\downarrow k=1$$

$$\max_{x_0, x_1} x_0 + u(x_1)$$

$$s.t. \quad x_0 + p_1 x_1 = I$$

$$\downarrow$$

$$\max_{x_1} u(x_1) + I - p_1 x_1$$

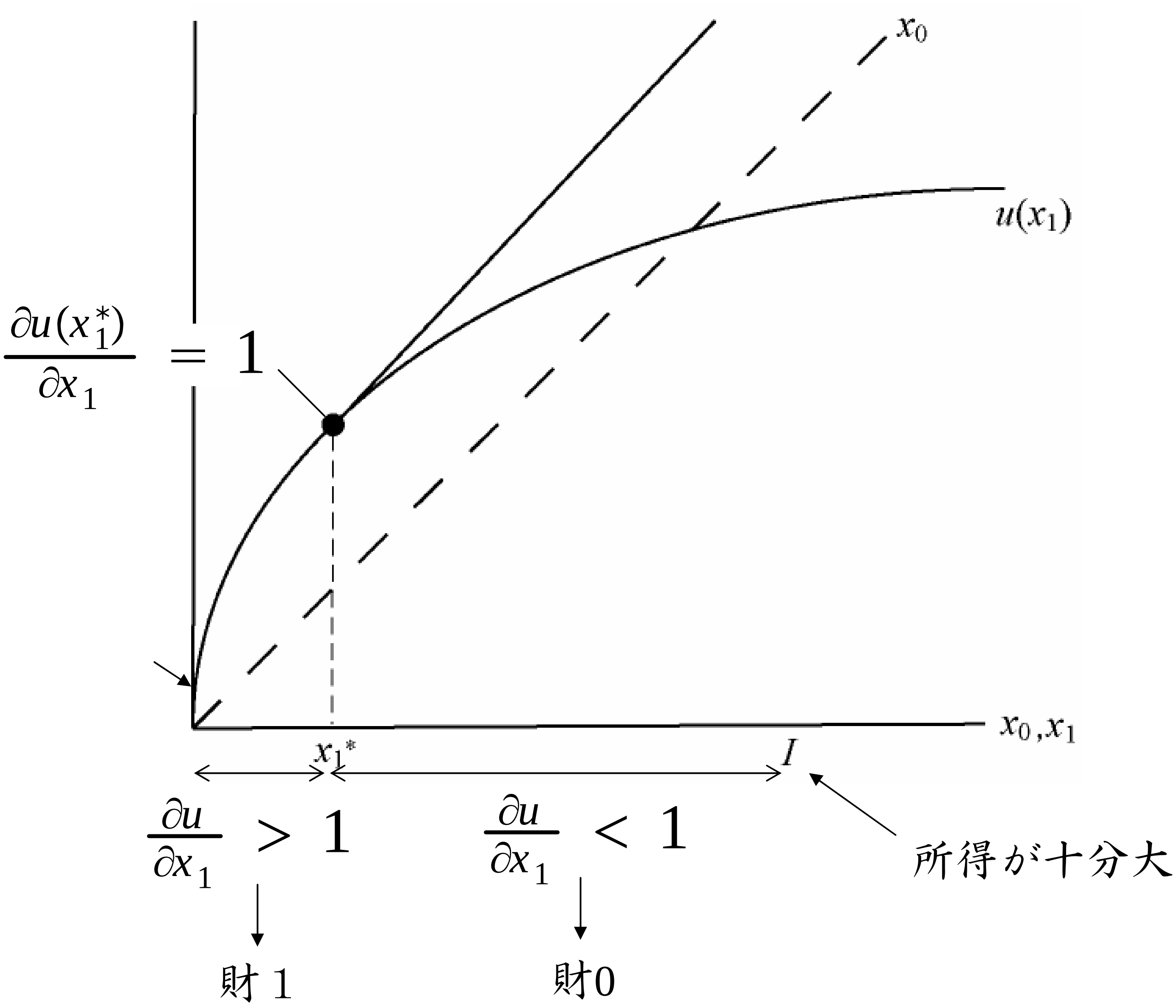
$$\frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1^*) = p_1 \longrightarrow x_1(p_1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x_1^*) \leq 0 \longrightarrow \text{内点解} \Rightarrow u\text{は凹関数}$$

$$\downarrow$$

$$v(p_1, I) = u(x_1(p_1)) + I - p_1 x_1(p_1) = V(p_1) + I$$

$p_1 = 1$ とする



x_0
$u(x_1)$
$\frac{\partial u(x_1^*)}{\partial x_1} = 1$
x_0, x_1
x_1^*
I
$\frac{\partial u}{\partial x_1} > 1$
$\frac{\partial u}{\partial x_1} < 1$
所得が十分大
財 1
財0