B.4. 利潤最大化問題

§B.4.1 利潤最大化問題と利潤関数

総収入－total revenue　　総生産費用－total production cost

短期：

$$\pi(p, w, \bar{x}_f) \equiv \max_{x_v, y} \sum_{i=1}^{m} p_i y_i - \left\{ \sum_{i=1}^{k} w_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} w_i \bar{x}_i \right\} \quad \text{(B.65)}$$

$$s.t. \quad F(x_v, y; \bar{x}_f) = 0$$

利潤関数

長期：

$$\pi(p, w) \equiv \max_{x_v, y} \sum_{i=1}^{m} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \quad \text{(B.66)}$$

$$s.t. \quad F(x, y) = 0$$

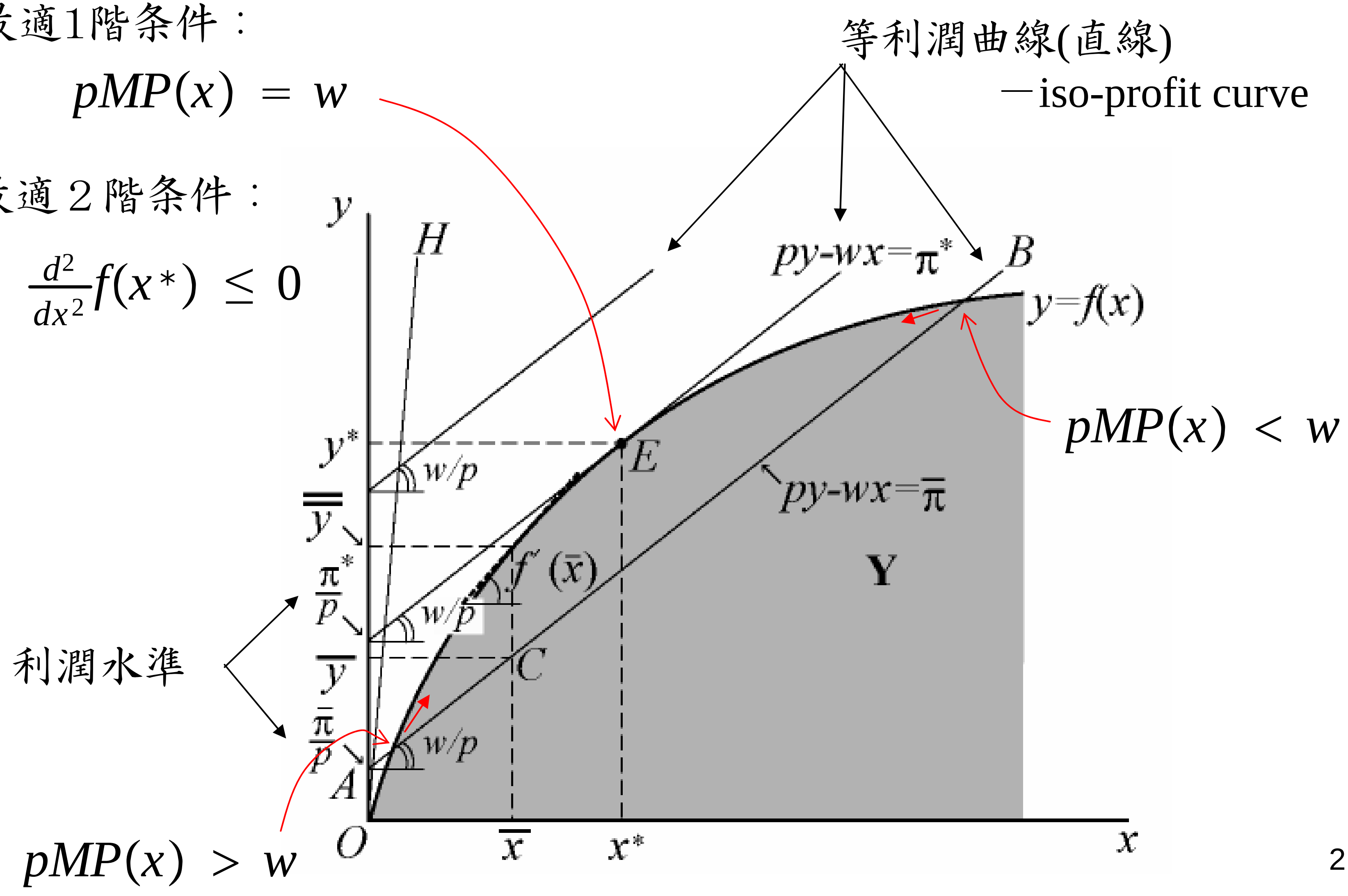
利潤最大化問題のエッセンス

最適1階条件：

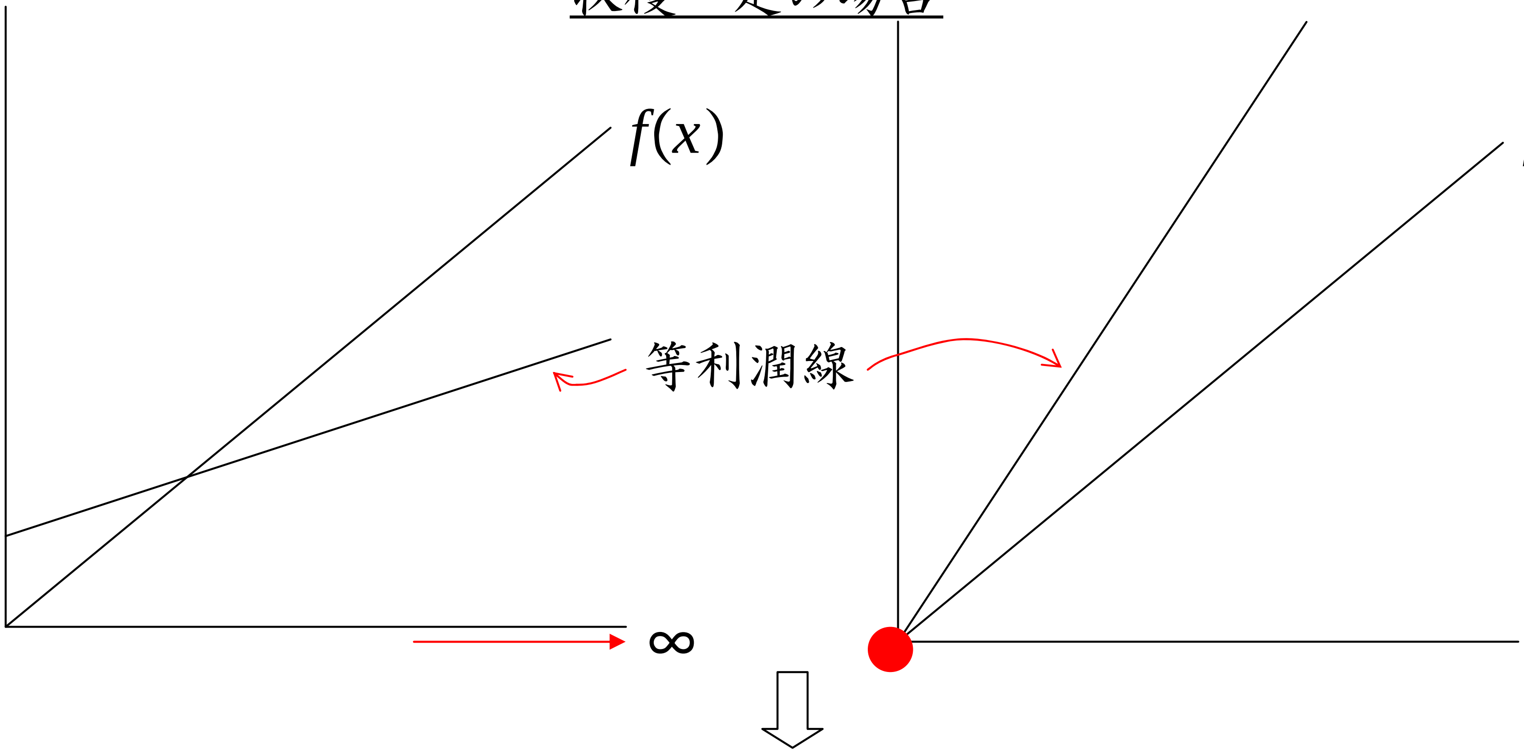
$$pMP(x) = w$$

最適２階条件：

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x^*) \leq 0$$



収穫一定の場合



収穫一定＋最適において有限正な産出量⇒利潤ゼロ

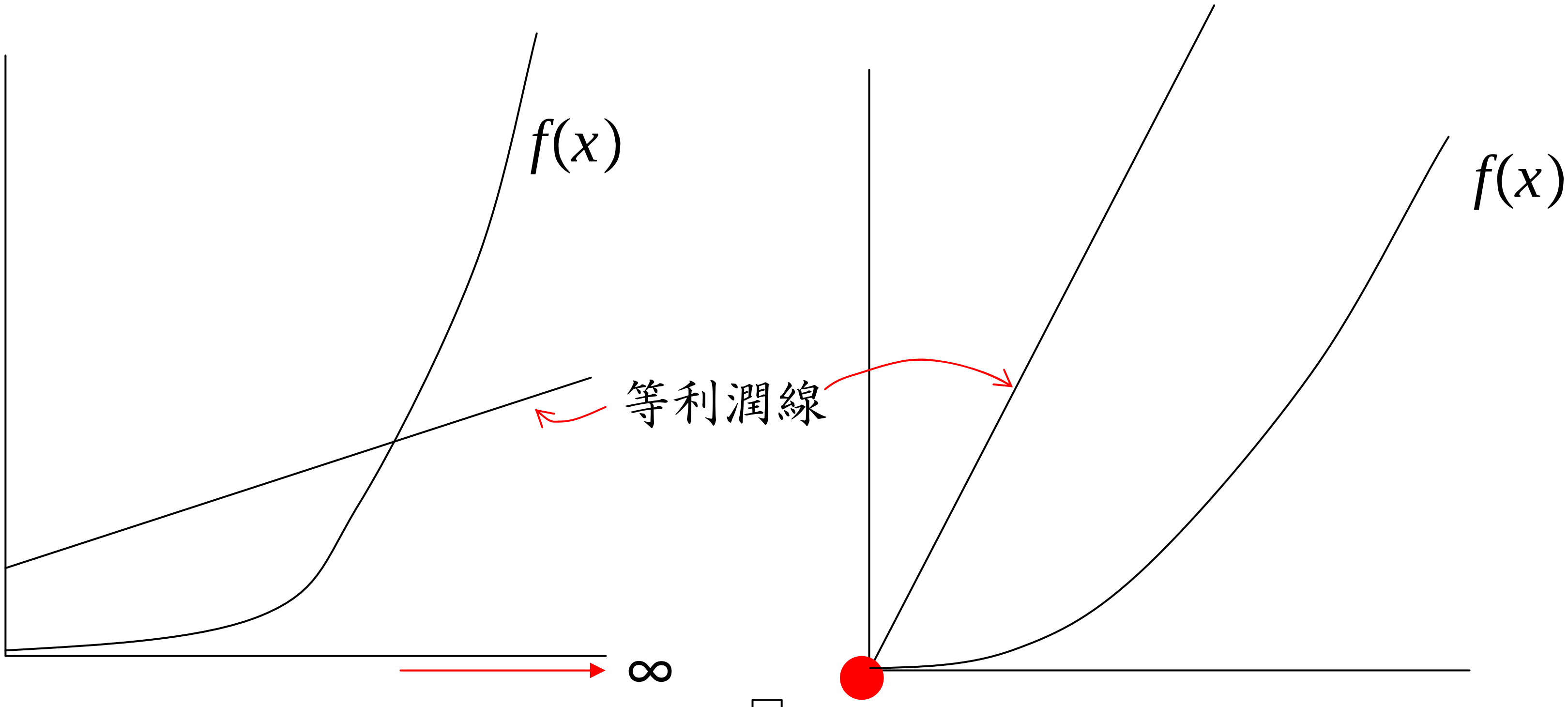
限界費用

$$y(p)=\begin{cases}\infty & \text{if } p>c\\ [0,\infty) & \text{if } p=c\\ 0 & \text{if } p<c\end{cases}$$

収穫一定が成立する場合

供給関数はあまり意味を持たない

収穫逓増の場合



⇩

産出量・利潤はゼロまたは∞

§B.4.2 供給関数

$$\max_y py - C(y; w_v, w_f, \bar{x}_f)$$

$$\Downarrow$$

最適解は固定費用に依存しない

$$\max_y py - C_v(y; w_v, \bar{x}_f)$$

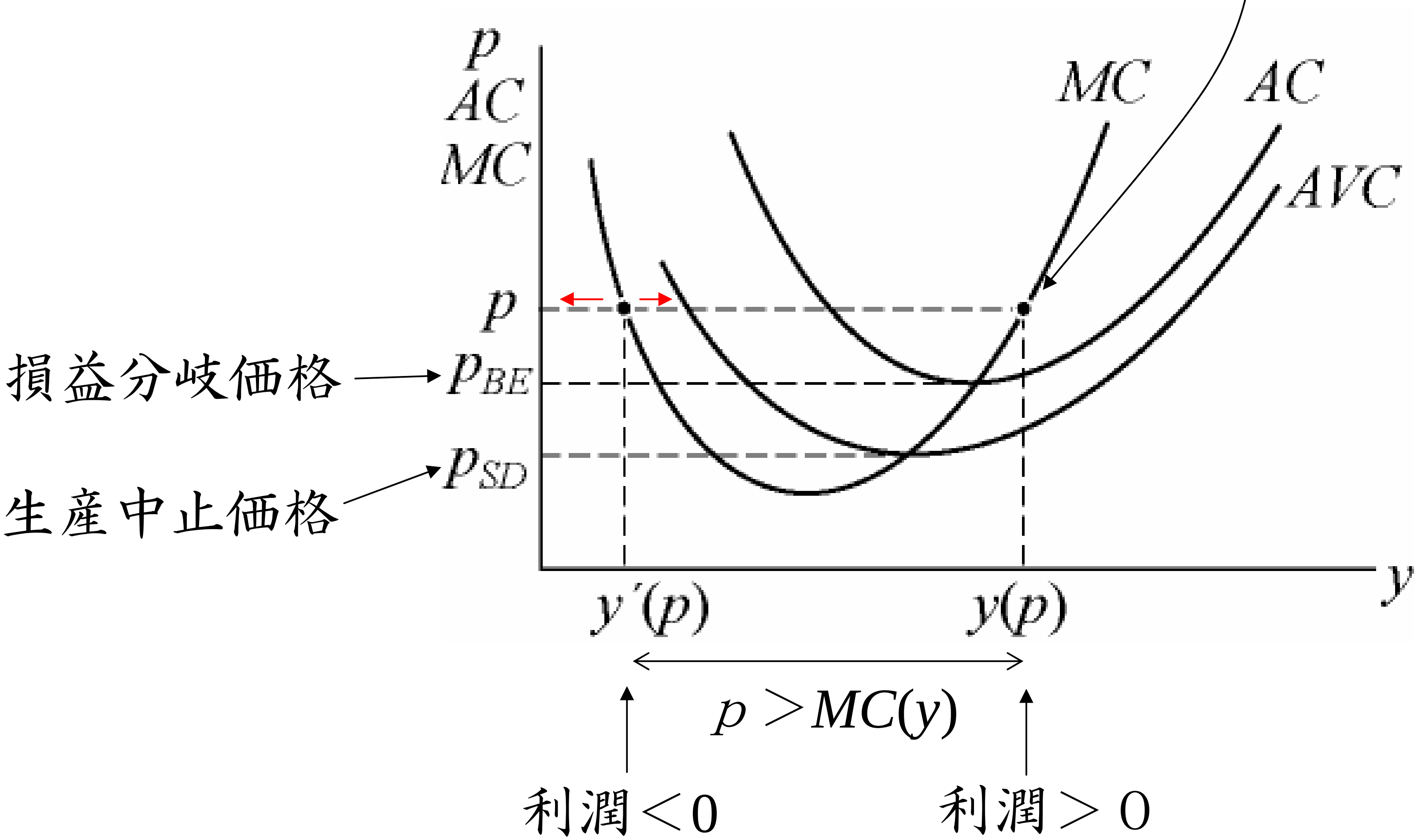
事実B.31（利潤最大化の１階条件）

限界費用： $\frac{\partial}{\partial y} C_v(y; w_v, \bar{x}_f) = p$ ：限界収入

事実B.32（利潤最大化の2階条件）

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} C_v(y; w_v, \bar{x}_f) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y} MC(y^*; w, \bar{x}_f) > 0$$

２階条件：最適産出量においてMCは増加



定義B.28（供給関数－supply function)

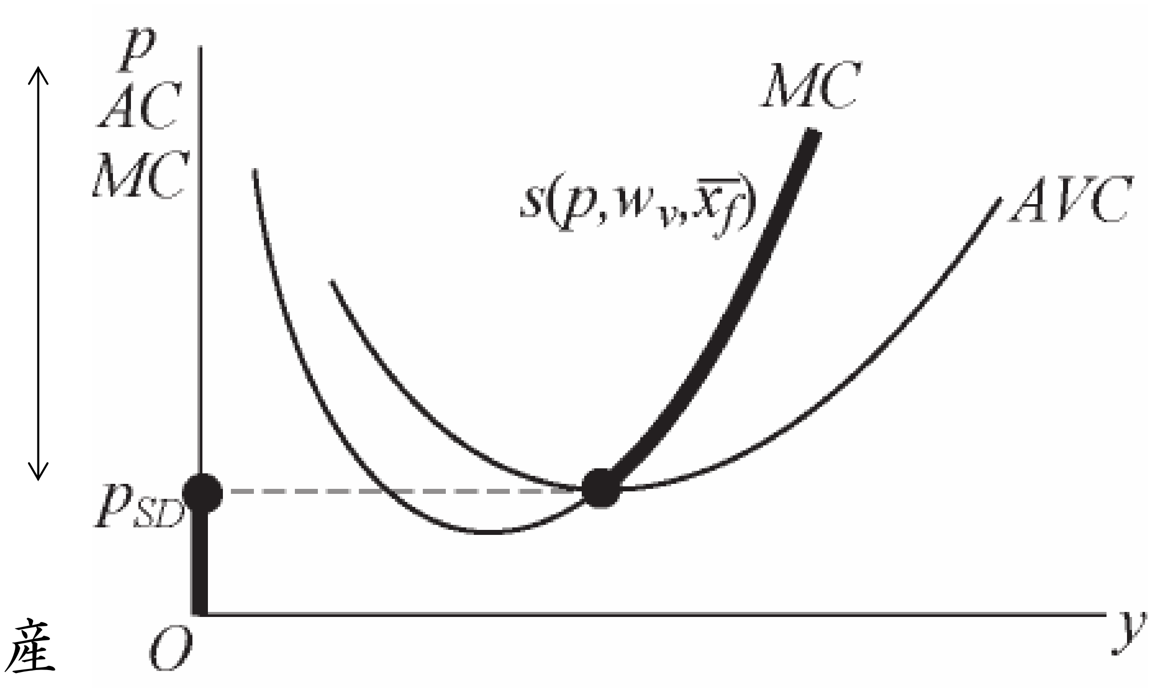
内点解

⇩

右上がり

⇩

収穫逓減部分で生産



MC曲線

$$s(p, w_v, \bar{x}_f) = \begin{cases} 0 & \text{if } p < p_{SD} \\ \{0, y(p)\} & \text{if } p = p_{SD} \\ y(p) & \text{if } p > p_{SD} \end{cases} \qquad \text{(B.74)}$$

定義B.29（(無制約の)要素需要関数－
(unconstrained) factor demand function)

$$d(p, w_v, w_f, \bar{x}_f) \equiv h(s(p, w_v, \bar{x}_f); w_v, \bar{x}_f)$$

産出量も最適に調整

定義B.30（利潤関数－profit function）

$$\pi(p, w) \equiv ps(p, w) - C(s(p, w); w)$$

§B.4.3 利潤関数と要素需要関数の性質

事実B.34（価格に対する反応）

$$\left.\begin{array}{l} w' \leq w \\ p' \geq p \end{array}\right\} \Rightarrow \pi(p', w') \geq \pi(p, w)$$

<u>証明</u>

$$\left.\begin{array}{c} y \\ y' \end{array}\right\} \text{を} \left\{\begin{array}{c} (p,w) \\ (p',w') \end{array}\right\} \text{の下での最適解とすると}$$

$$\begin{aligned} \pi(p',w') &= p' \cdot y' - w' \cdot x' \\ &\geq p' \cdot y - w' \cdot x \\ &\geq p \cdot y - w \cdot x \\ &= \pi(p,w) \end{aligned}$$

事実B.35（価格に関する１次同次性）

$$\pi(tp, tw) = t\pi(p, w) \quad \forall t \geq 0$$

(x, y) を p のでの最適解とすると

$$p \cdot y - w \cdot x \geq p \cdot y' - w \cdot x' \quad \forall (x', y') \in \mathbf{Y}$$

$$\Big\downarrow \text{両辺 } t \text{ 倍}$$

$$t(p \cdot y - w \cdot x) \geq t(p \cdot y' - w \cdot x') \quad \forall t \geq 0, \forall (x', y') \in \mathbf{Y}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\therefore \ \pi(tp, tw) = t(p \cdot y - w \cdot x) = t\pi(p, w)$$

事実B.36（価格に関する凸性）

$$0 \le t \le 1$$

$$(p'', w'') = t(p, w) + (1-t)(p', w')$$

$$\Downarrow$$

$$\pi(p'', w'') \le t\pi(p, w) + (1-t)\pi(p', w')$$

<u>証明</u>

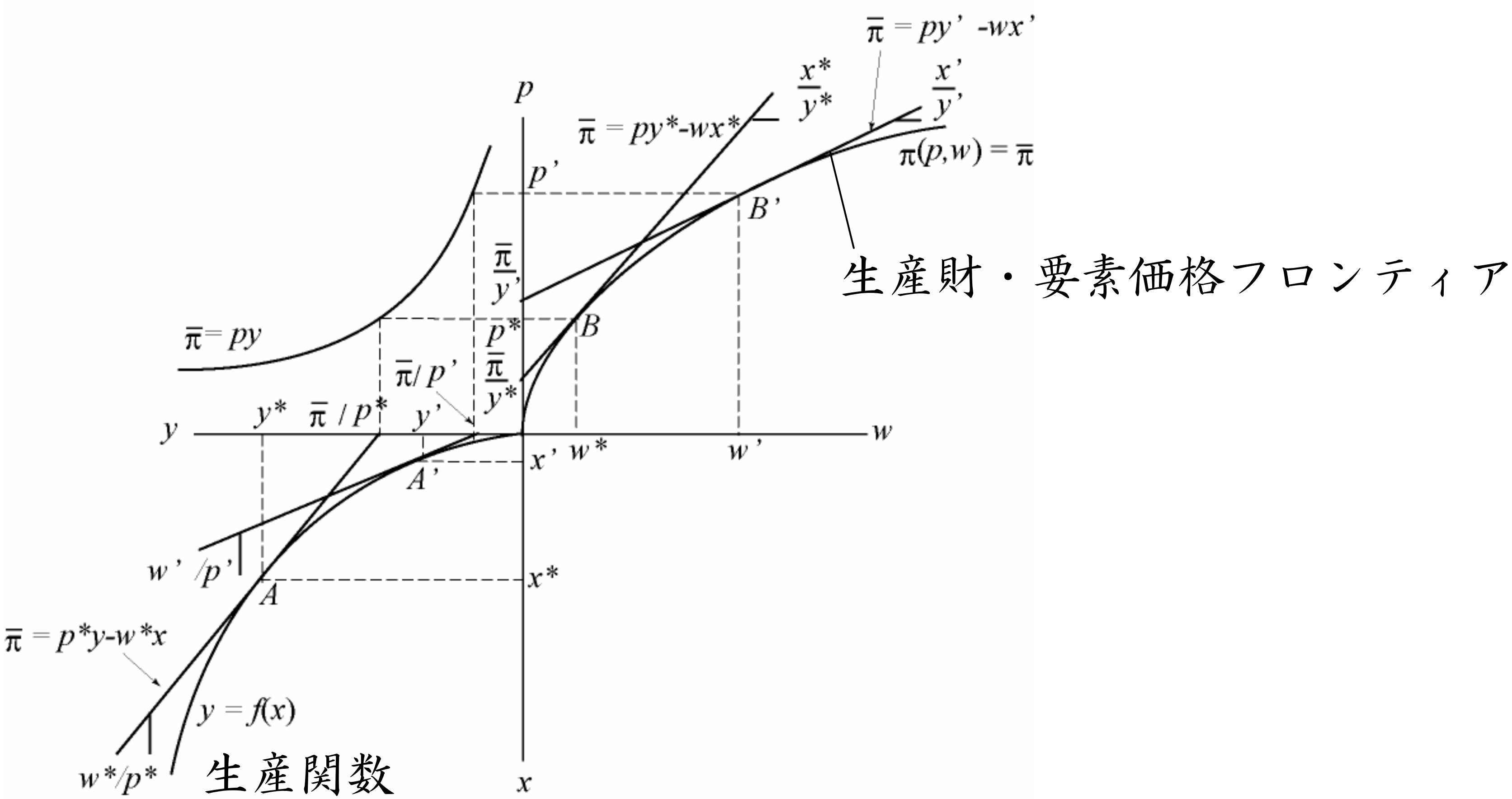
$$\begin{aligned}\pi(p'', w'') &= (tp + (1-t)p') \cdot y'' - (tw + (1-t)w') \cdot x'' \\ &= \underbrace{t(p \cdot y'' - w \cdot x'')}_{\le\, t\pi(p,w)} + \underbrace{(1-t)(p' \cdot y'' - w' \cdot x'')}_{\le\, (1-t)\pi(p', w')}\end{aligned}$$

双対性：生産関数と価格フロンティア（１生産財・１要素の場合）

生産財・要素価格フロンティア：

フロンティア上各点におけるフロンティア勾配＝

その点に対応する価格ベクトル下での最適投入・産出比



生産財・要素価格フロンティアの描き方

⑤価格平面での等利潤線を描く：

$(0, \bar{\pi}/y^*), (w^*, p^*)$ を通る傾きx^*/y^*の直線

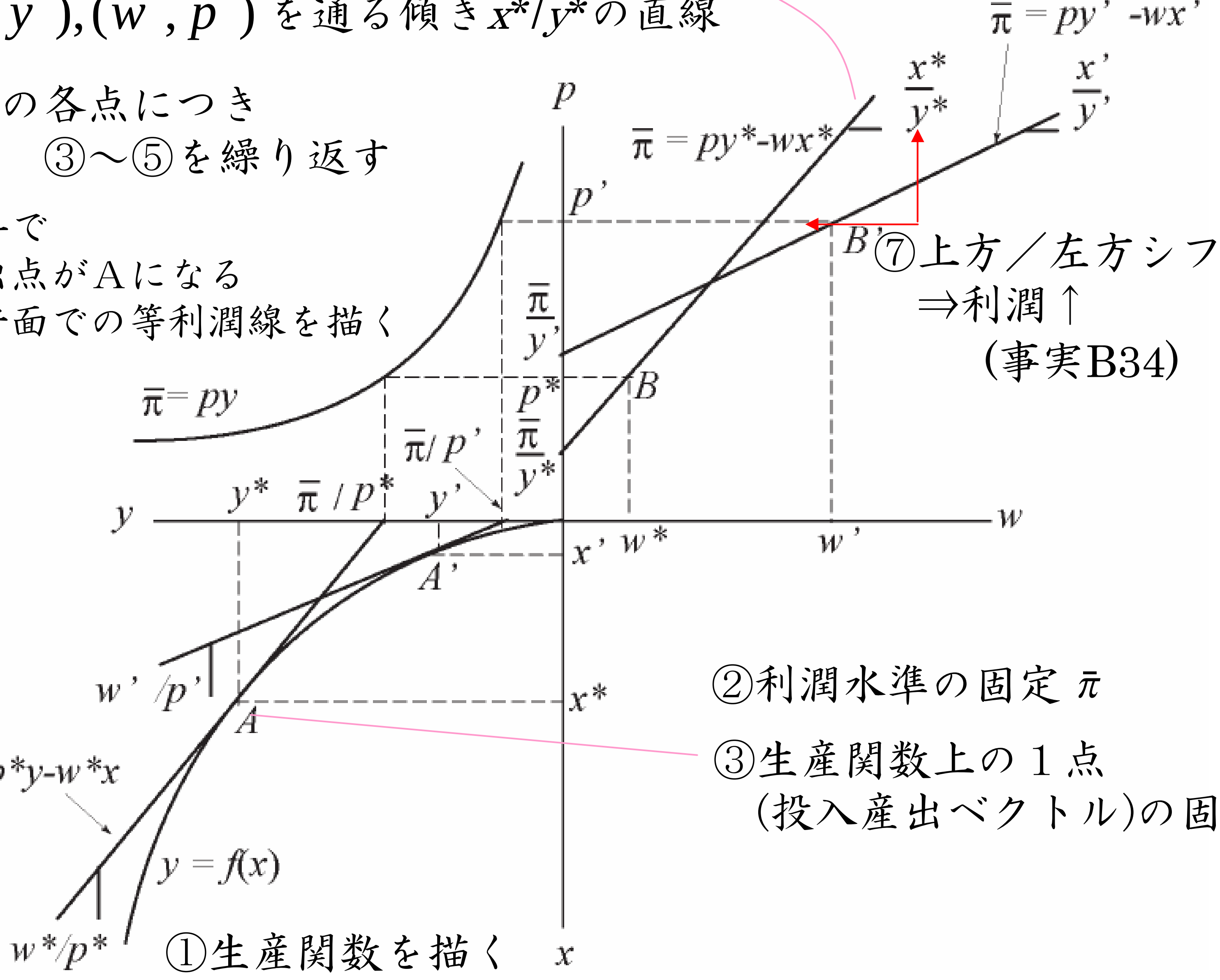
⑥生産関数上の各点につき

③～⑤を繰り返す

④利潤$\bar{\pi}$を所与で

最適投入産出点がAになる

産出・投入平面での等利潤線を描く



⑦上方／左方シフト

⇒利潤↑

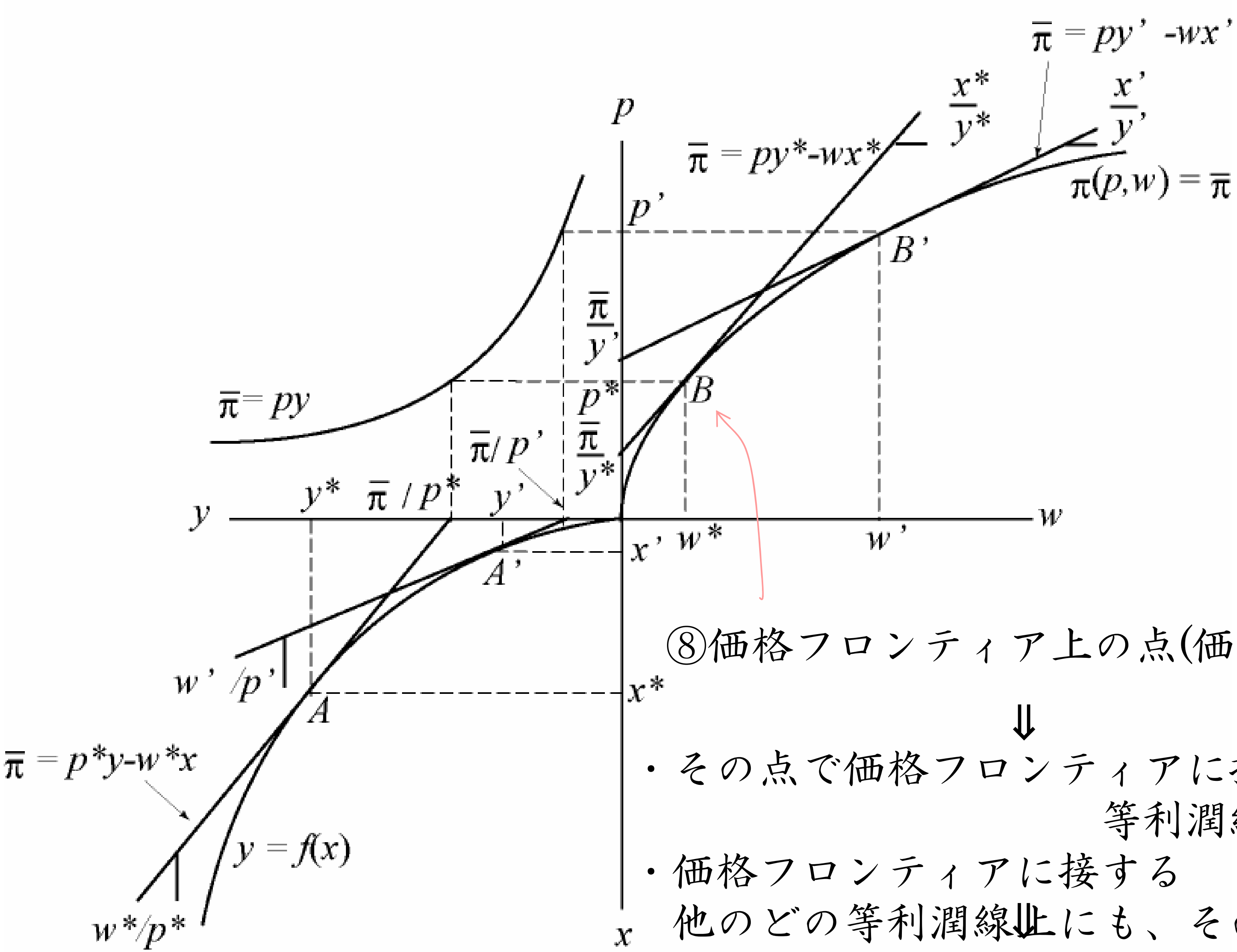
(事実B34)

②利潤水準の固定 $\bar{\pi}$

③生産関数上の１点

(投入産出ベクトル)の固定

①生産関数を描く



⑧価格フロンティア上の点(価格ベクトル)

⇓

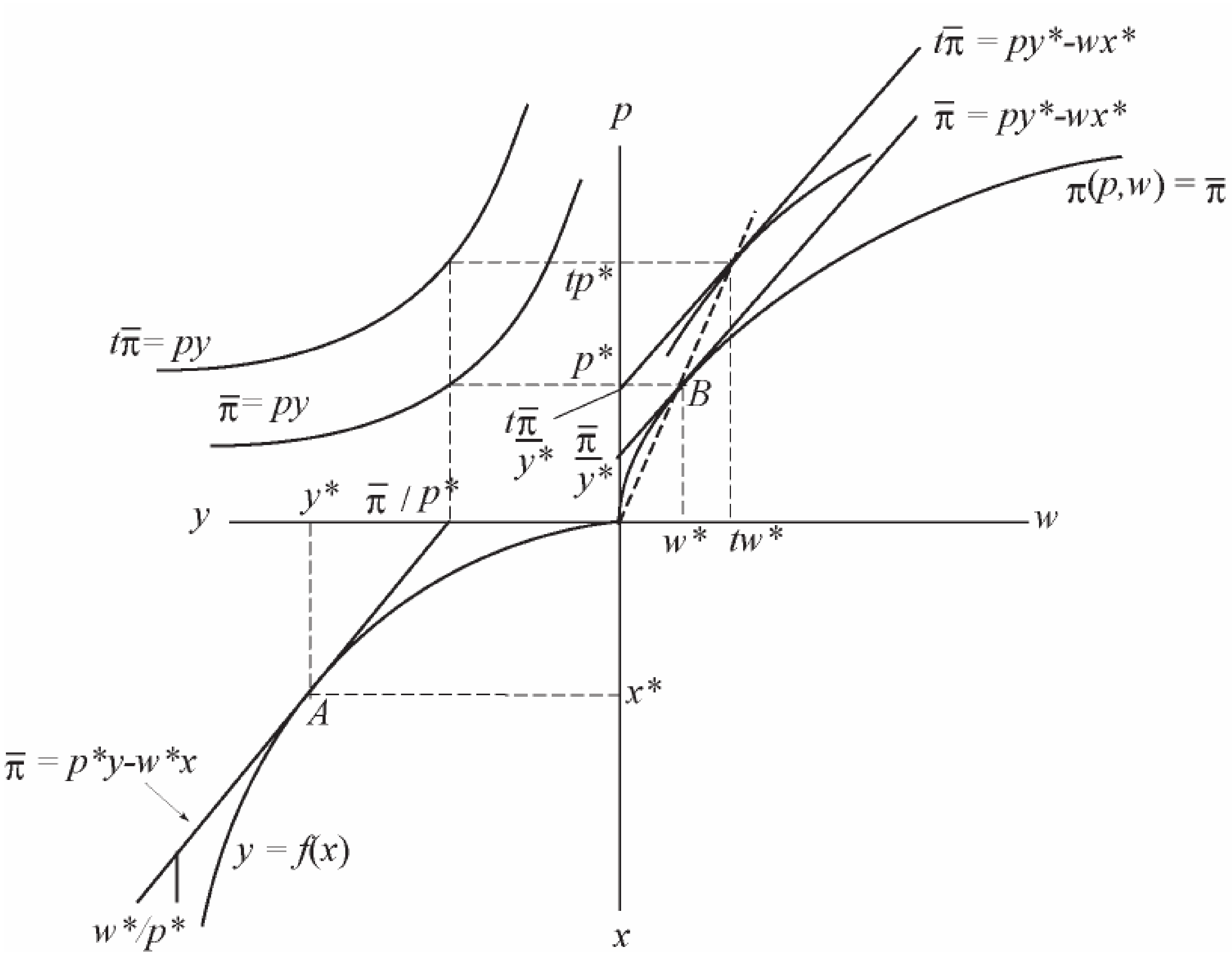
・その点で価格フロンティアに接する
　　　　　　　　等利潤線上にある

・価格フロンティアに接する
他のどの等利潤線上にも、その上方にも無い

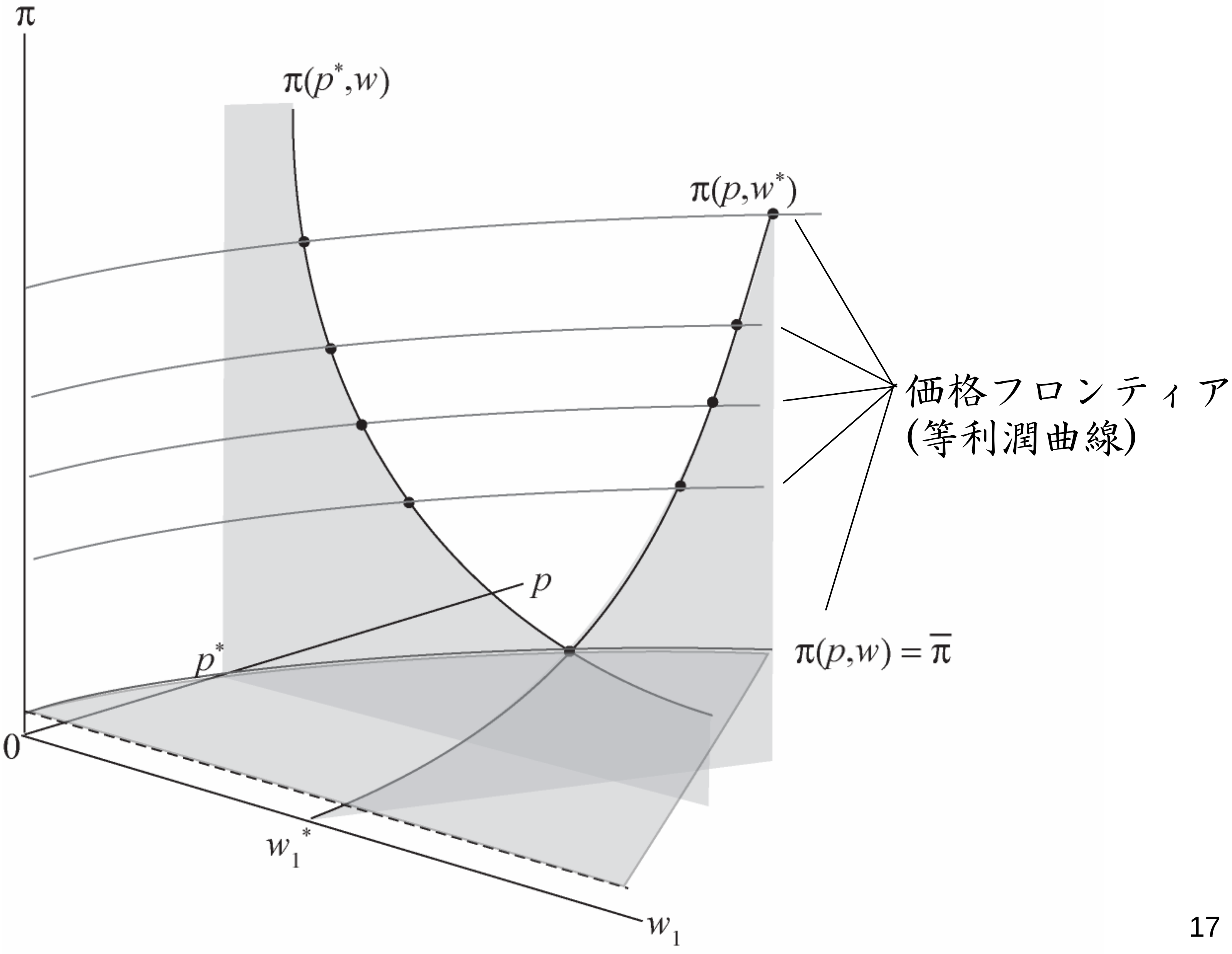
⇓

価格フロンティア＝
等利潤線の下方包絡線 ⇒ 価格に関する凸関数

⑨利潤関数の価格に関する１次同次性（事実B.35).

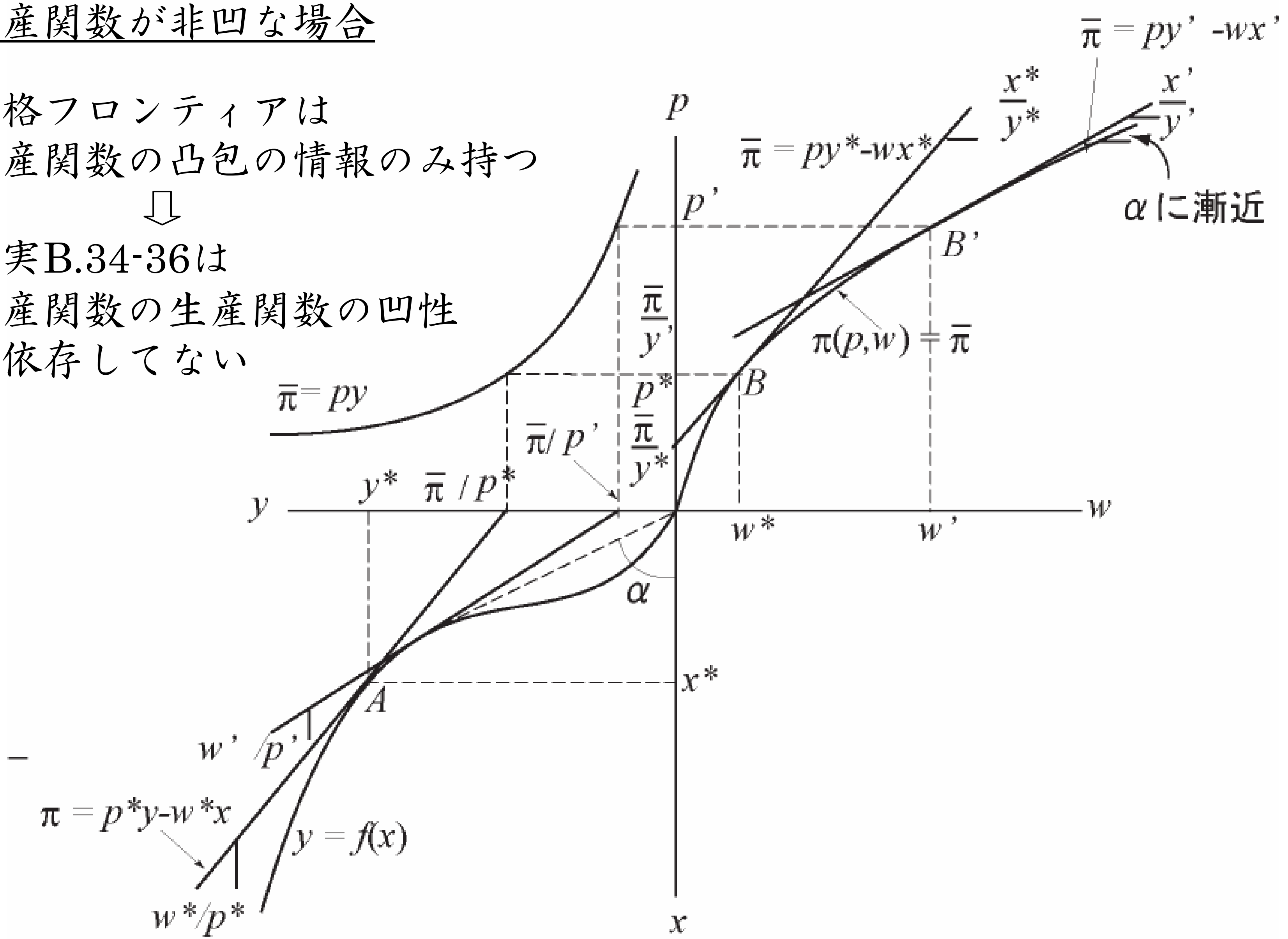


利潤関数



生産関数が非凹な場合

価格フロンティアは
生産関数の凸包の情報のみ持つ
⇩
事実B.34-36は
生産関数の生産関数の凹性
に依存してない



$$\max_{x,y} p^* y - \sum_{i=1}^{n} w_i^* x_i$$

$$s.t.\quad f(x) = y$$

双対問題

$$\Longleftrightarrow$$

$$\min_{p,w} \pi(p, w)$$

$$s.t.\quad py^* - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^* = \pi^*$$

双対性

(凹)生産関数 $\Longleftrightarrow$ (凸)利潤関数

事実B.37（双対問題１階条件：ホテリングの補題－Hotelling’s lemma)

$$\frac{\partial}{\partial p}\pi(p, w) = y^*$$

$$\frac{\partial}{\partial w_i}\pi(p, w) = -d_i(p, w)$$

<u>証明</u>

$$\pi(p, w) = ps(p, w) - C(s(p, w); w)$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\pi(p, w) = s(p, w) + \left\{p - \frac{\partial}{\partial y}C(y^*; w)\right\}\frac{\partial}{\partial p}s(p, w)$$

FOC：ゼロ

$$\frac{\partial}{\partial w_i}\pi(p, w) = \left\{p - \frac{\partial}{\partial y}C(y^*; w)\right\}\frac{\partial}{\partial w_i}s(p, w) - \frac{\partial}{\partial w_i}C(y^*; w)$$

$$h(y^*; w) = d(p; w)$$

利潤関数の凸性

＋

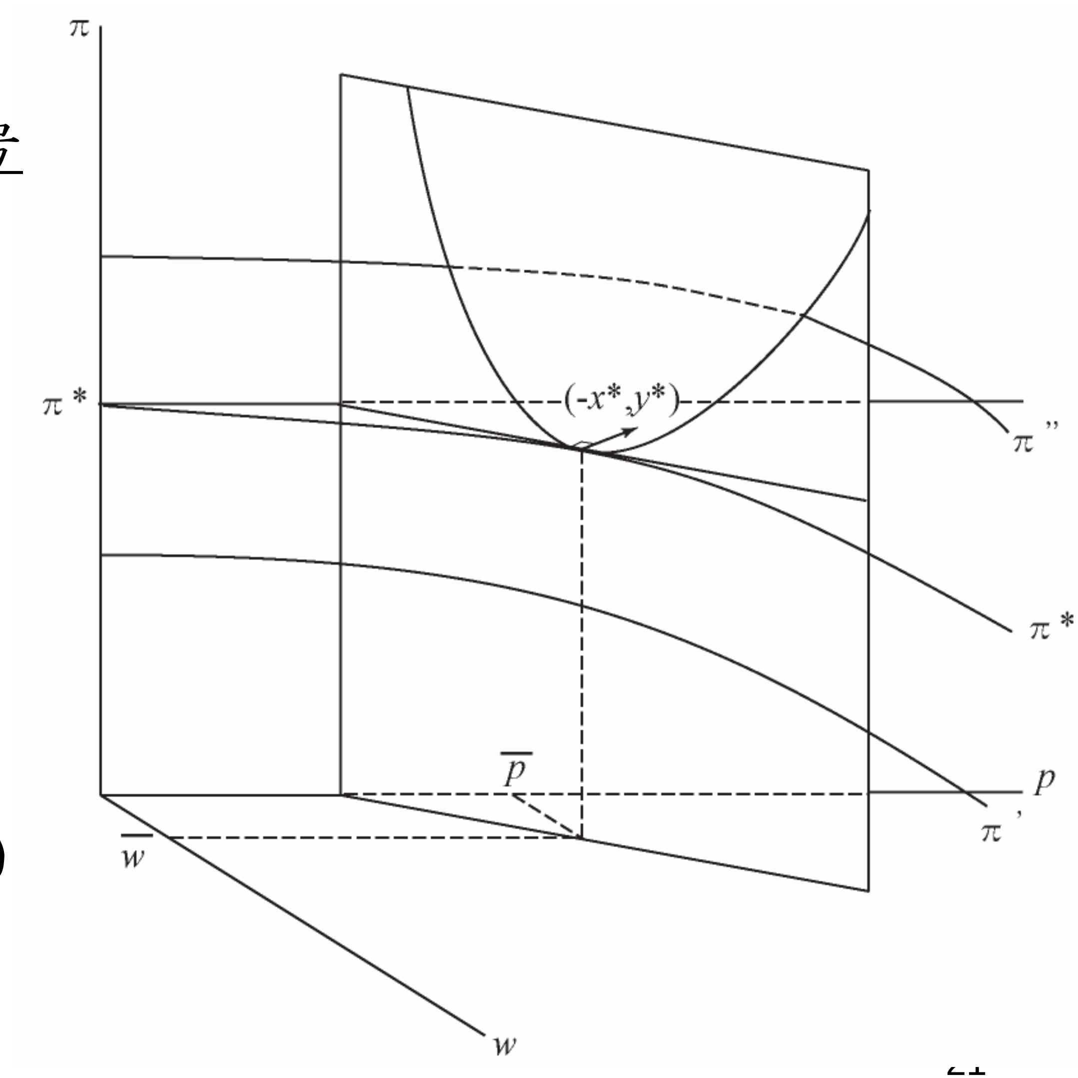
２階微分可能性

↓

事実B.39

$D^2\pi(p,w)$ ：対称半正値定符号

双対問題２階条件



供給・要素需要の価格効果

$$\frac{\partial}{\partial p}s(p,w) \geq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial w_i}d_i(p,w) \leq 0$$

価格効果の交叉対称性

$$\frac{\partial}{\partial w_j}d_i(p,w) = \frac{\partial}{\partial w_i}d_j(p,w)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_i}s(p,w) = -\frac{\partial}{\partial p}d_i(p,w)$$

供給＋要素需要の法則

ホテリングの補題： $D\pi(p,w) = \begin{bmatrix} s(p,w) \\ -d(p,w) \end{bmatrix}$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} ds(p,w) \\ d(-d(p,w)) \end{bmatrix} = D^2\pi(p,w)\begin{bmatrix} dp \\ dw \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

半正値定符号

$$\begin{bmatrix} dp \\ dw \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ds(p,w) \\ d(-d(p,w)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dp \\ dw \end{bmatrix} \cdot D^2\pi(p,w)\begin{bmatrix} dp \\ dw \end{bmatrix} \geq 0$$

i.e, 生産財価格・供給量は同一方向に動く
要素価格・要素需要は反対方向に動く

供給＋要素需要の法則(離散バージョン)

$$\begin{bmatrix} p - p' \\ w - w' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(p,w) - s(p',w') \\ -d(p,w) + d(p',w') \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(p,w) \\ -d(p,w) \end{bmatrix}}_{=\pi(p,w)} - \underbrace{\begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(p',w') \\ -d(p',w') \end{bmatrix}}_{\le \pi(p,w)}}_{\ge 0}$$

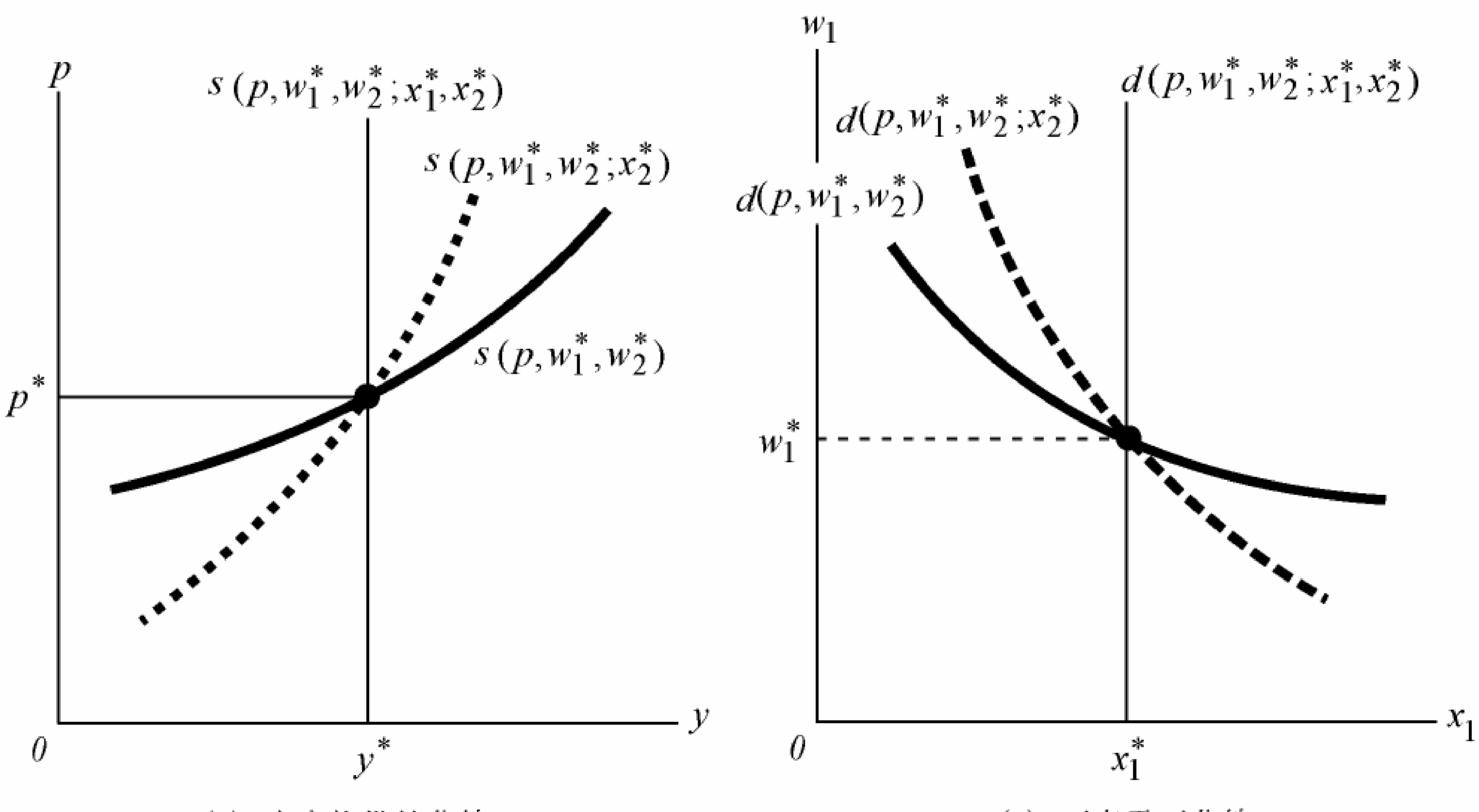
$$+ \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} p' \\ w' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(p',w') \\ -d(p',w') \end{bmatrix}}_{=\pi(p',w')} - \underbrace{\begin{bmatrix} p' \\ w' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(p,w) \\ -d(p,w) \end{bmatrix}}_{\le \pi(p',w')}}_{\ge 0} \ge 0$$

事実B.38 (ルシャトリエ原理－The LeChatelier principle)

供給・要素需要の価格弾力性：長期＞短期

$$\frac{\partial}{\partial p}s(p^*, w^*) \ \geq \ \frac{\partial}{\partial p}s(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_i}d_i(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*) \ \geq \ \frac{\partial}{\partial w_i}d_i(p^*, w^*)$$



(a) 生産物供給曲線　　(b) 要素需要曲線

(p^*, w^*)の下での
長期利潤最大化解

$$g(p,w) \equiv \pi(p,w) - \pi(p, \underbrace{w_v, w_f}; x_f^*)$$

$$x = (x_v^*, x_f^*)$$

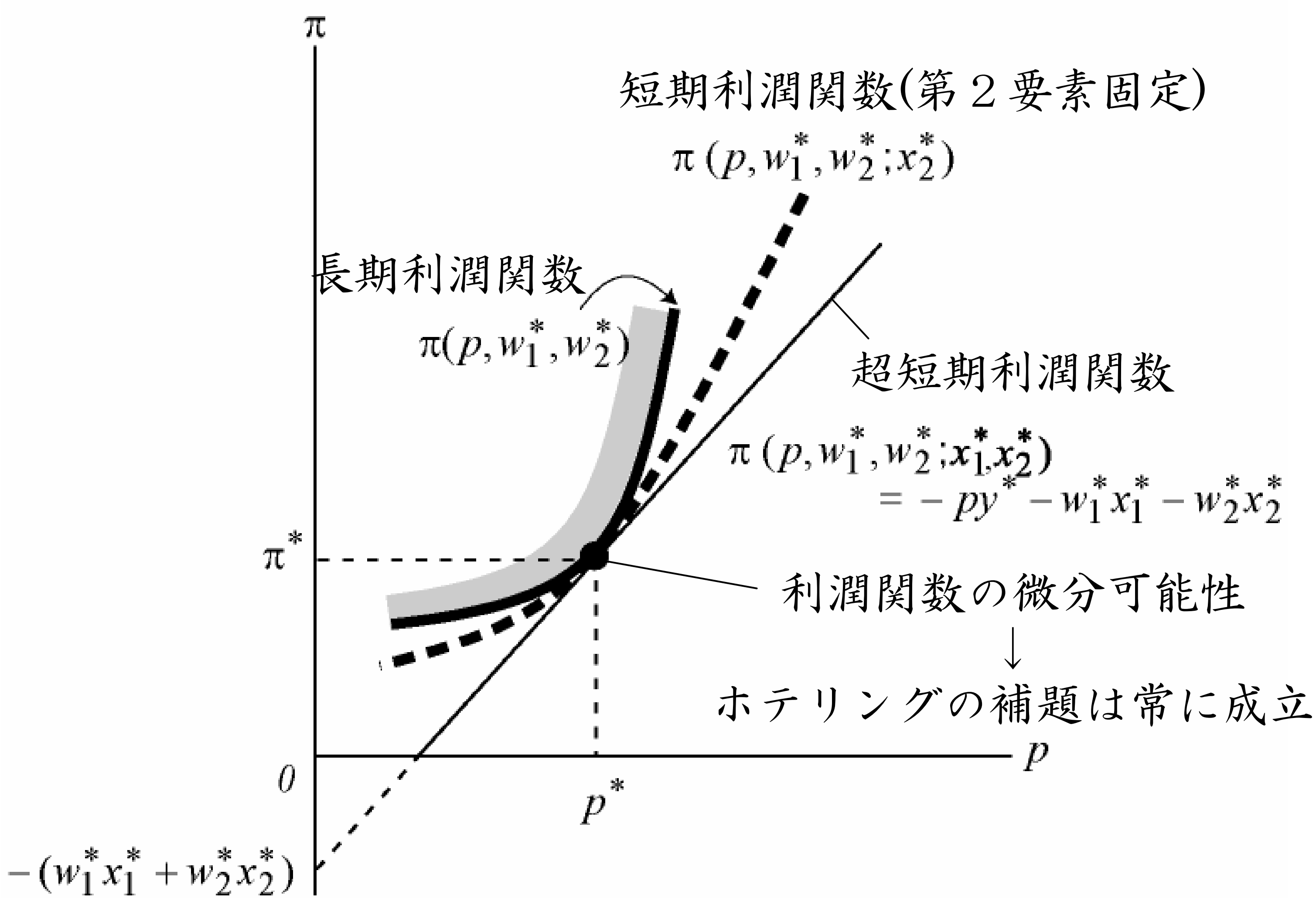
$$w = (w_v, w_f)$$

$$g(p,w) \geq g(p^*, w^*) = 0$$

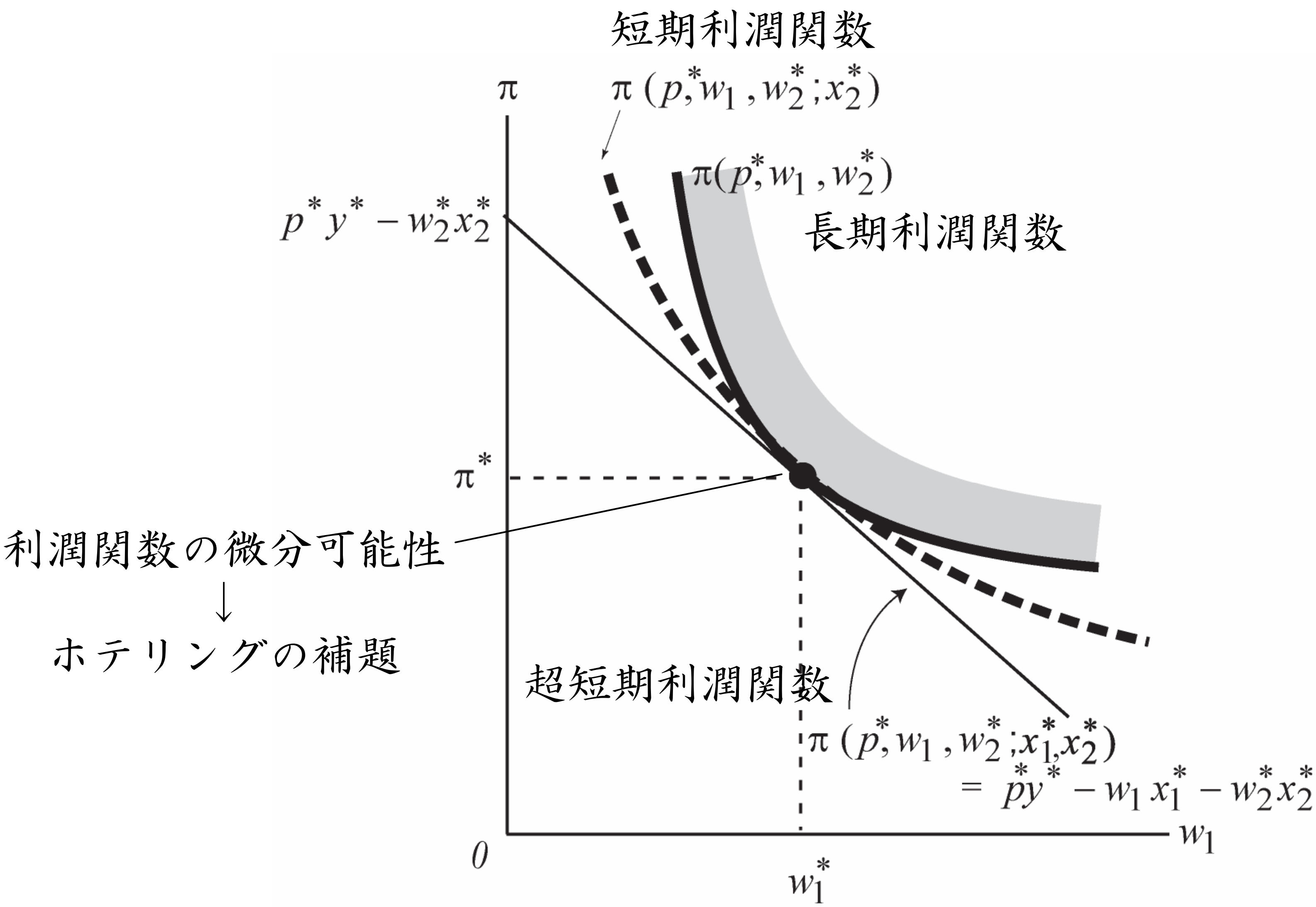
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial p} g(p^*, w^*) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial p}\pi(p^*, w^*)}_{= s(p^*, w^*)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial p}\pi(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*)}_{= s(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*)} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial w_i} g(p^*, w^*) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial w_i}\pi(p^*, w^*)}_{= -d_i(p^*, w^*)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial w_i}\pi(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*)}_{= -d_i(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} = \frac{\partial}{\partial p} s(p^*, w^*) - \frac{\partial}{\partial p} s(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*) \geq 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial w_i^2} = \frac{\partial}{\partial w_i} d_i(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*) - \frac{\partial}{\partial w_i} d_i(p^*, w^*) \geq 0 \end{cases}$$

利潤関数の要素価格についての断面



利潤関数の生産財価格についての断面



事実B.40（要素需要関数の価格効果の分解)

$$\frac{\partial d_i}{\partial w_j} = \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial w_j}}_{\text{代替効果 substitution effect}} - \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial y}\frac{\partial h_j}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial p}}_{\text{産出量効果 scale effect}}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_i} h_i(y^*, w) \le 0$$

正常要素 $\Rightarrow \quad \dfrac{\partial h_i}{\partial y} > 0$

下級要素 $\Rightarrow \quad \dfrac{\partial h_i}{\partial y} < 0$

内点解 $\Rightarrow \quad \dfrac{\partial s}{\partial p} > 0$

証明

$$d_i(p,w) = h_i(s(p,w);w)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial w_j} d_i(p,w) = \frac{\partial}{\partial w_j} h_i(y^*,w) + \frac{\partial}{\partial y} h_i(y^*,w) \frac{\partial}{\partial w_j} s(p,w)$$

要素価格の変化
↓
最適産出量の変化

産出量の変化
↓
制約付要素需要の変化

価格効果の対称性

$$= -\frac{\partial}{\partial p} d_j(p,w)$$

恒等式

$$= -\frac{\partial}{\partial p} h_j(s(p,w),w)$$

$$= --\frac{\partial}{\partial y} h_j(y^*,w) \frac{\partial}{\partial p} s(p,w)$$

$$w_1 \to w_1'(> w_1)$$

相対要素価格の変化

↓

代替効果

要素価格変化

↓

限界費用の変化

↓

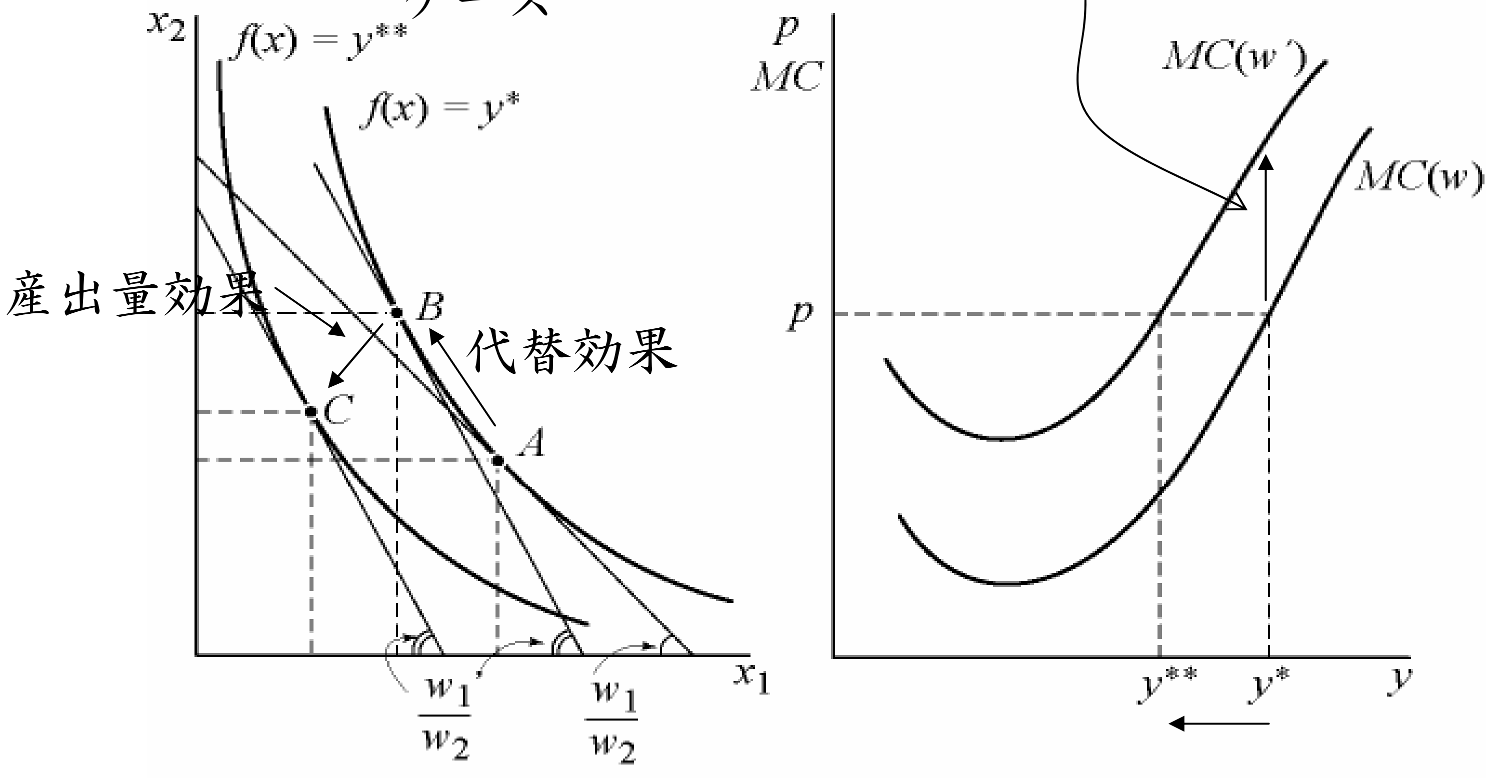
最適産出量の変化

↓

要素需要の変化

$$\frac{\partial^2 C}{\partial w_i \partial y} = \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial w_i} = \frac{\partial h_i}{\partial y}$$

正常財のケース



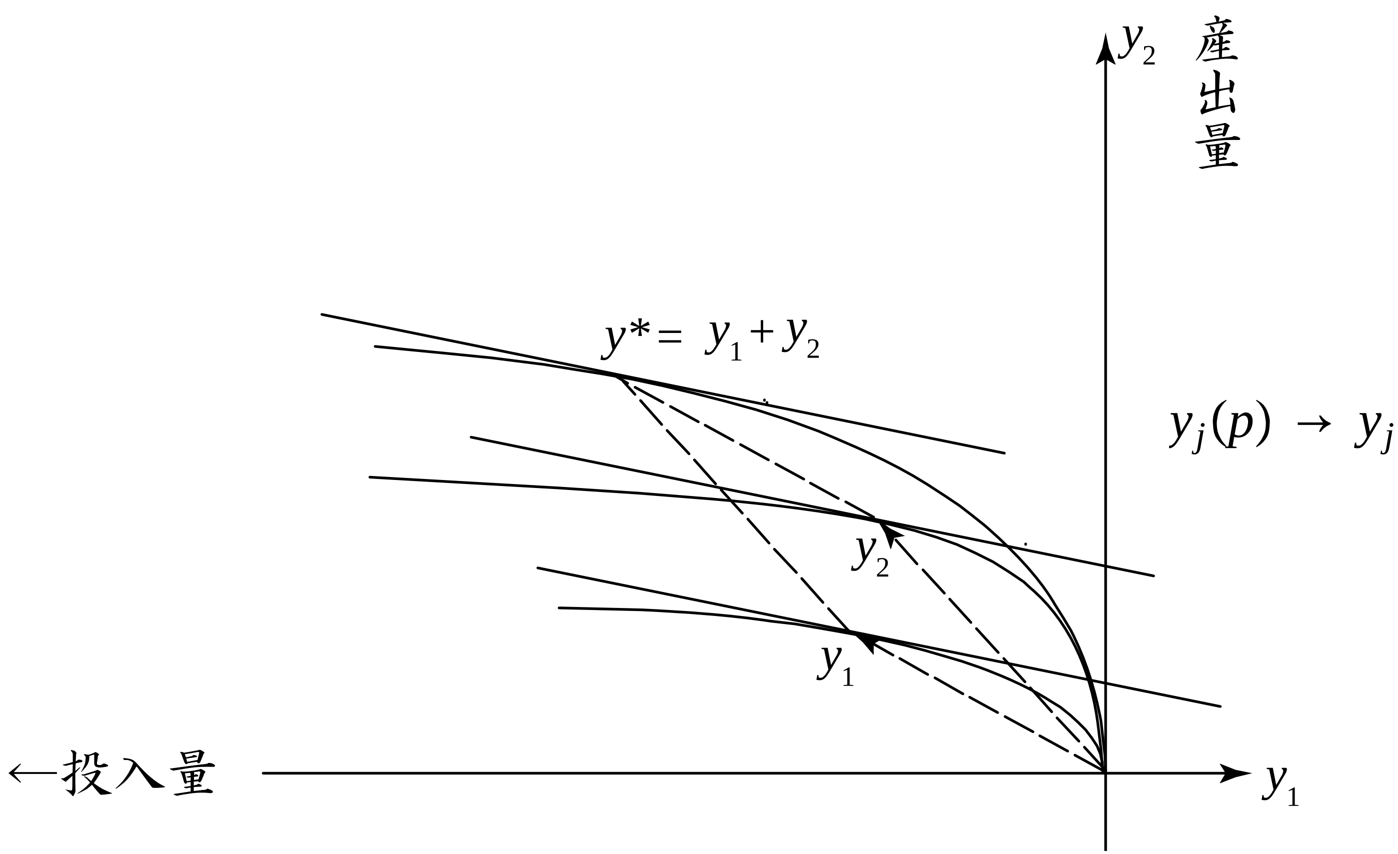
§B.4.4 利潤・供給関数の集計

ここだけ、産出・投入量をnet valueとして統一なベクトル y で表す

定義B.33（集計生産可能集合－aggregate production possibility set)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \cdots + \mathbf{Y}_J = \left\{ y \in \mathbb{R}^L_+ : \text{ある} y_j \in \mathbf{Y}_j,\ \ j = 1, \ldots, J \text{について} y = \textstyle\sum_j y_j \right\} \tag{B,103}$$

$$y_j \in y_j(p)$$



定義B.32 (集計供給関数－aggregate supply function)

企業数：J

生産可能集合： $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_J$

$$y(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j(p) = \left\{ y \in \mathbb{R}^L_+ : \text{ある} y_j \in y_j(p), j = 1, \ldots, J \text{について} y = \sum_j y_j \right\}$$

(B.101)

第j企業の供給関数

事実B.41（集計供給に関する供給の法則－law of supply in aggregate)

$$
\begin{array}{c}
dp \cdot dy_j (= dp \cdot Dy_j(p)dp) \geq 0 \\
\Big\downarrow \text{集計} \qquad\qquad (B.102) \\
dp \cdot dy (= dp \cdot \underline{Dy(p)}dp) \geq 0
\end{array}
$$

半正値定符号

（離散的な価格・供給量変化、供給対応バージョンでも成立）

事実B.42 (利潤・供給関数の集計)

集計生産可能集合Ｙの下での「代表的企業」の利潤・供給関数

任意 $p \gg 0$ について
$$
\begin{cases}
\pi^*(p) = \sum_j \pi_j(p) & \text{(B.104)} \\
y^*(p) = \sum_j y_j(p) & \text{(B.105)}
\end{cases}
$$

$\underline{\pi^*(p) \geq \sum_j \pi_j(p)}$

$$\forall y_j \in \mathbf{Y}_j, \quad j = 1, \ldots, J \Rightarrow \sum_j y_j \in \mathbf{Y}$$

$$\downarrow$$

$$\pi^*(p) \geq p \cdot \left(\sum_j y_j\right) = \sum_j p \cdot y_j$$

$$\downarrow$$

$$\pi^*(p) \geq \sum_j \pi_j(p)$$

$\underline{\pi^*(p) \leq \sum_j \pi_j(p)}$

$$\sum_j y_j = y$$

$$\downarrow$$

$$\forall y \in \mathbf{Y}, \quad p \cdot y = p \cdot \sum_j y_j = \sum_j p \cdot y_j \leq \sum_j \pi_j(p)$$

$$\downarrow$$

$$\pi^*(p) \leq \sum_j \pi_j(p)$$