§B. 生産者行動の理論

§3.1.生産者(企業)の目的と制約

仮定B.1 (企業の目的―objective of a firm)

財・サービスの生産→利潤最大化

仮定B.2（利潤―profit)

販売収入－生産費用

仮定B.3（完全競争企業―perfectly competitive firm)

価格を所与として利潤最大化

(価格を受容して)

定義B.1（計画期間—planning horizon）

企業が意思決定を行う時間単位

短期—short-run

固定生産要素あり

長期—long-run

全生産要素が可変

定義B.2（生産技術—production technology）

実現可能な産出量・投入量の関係

§B.2. 生産技術

§B.2.1 生産可能集合

定義B.3（生産計画—production plan）

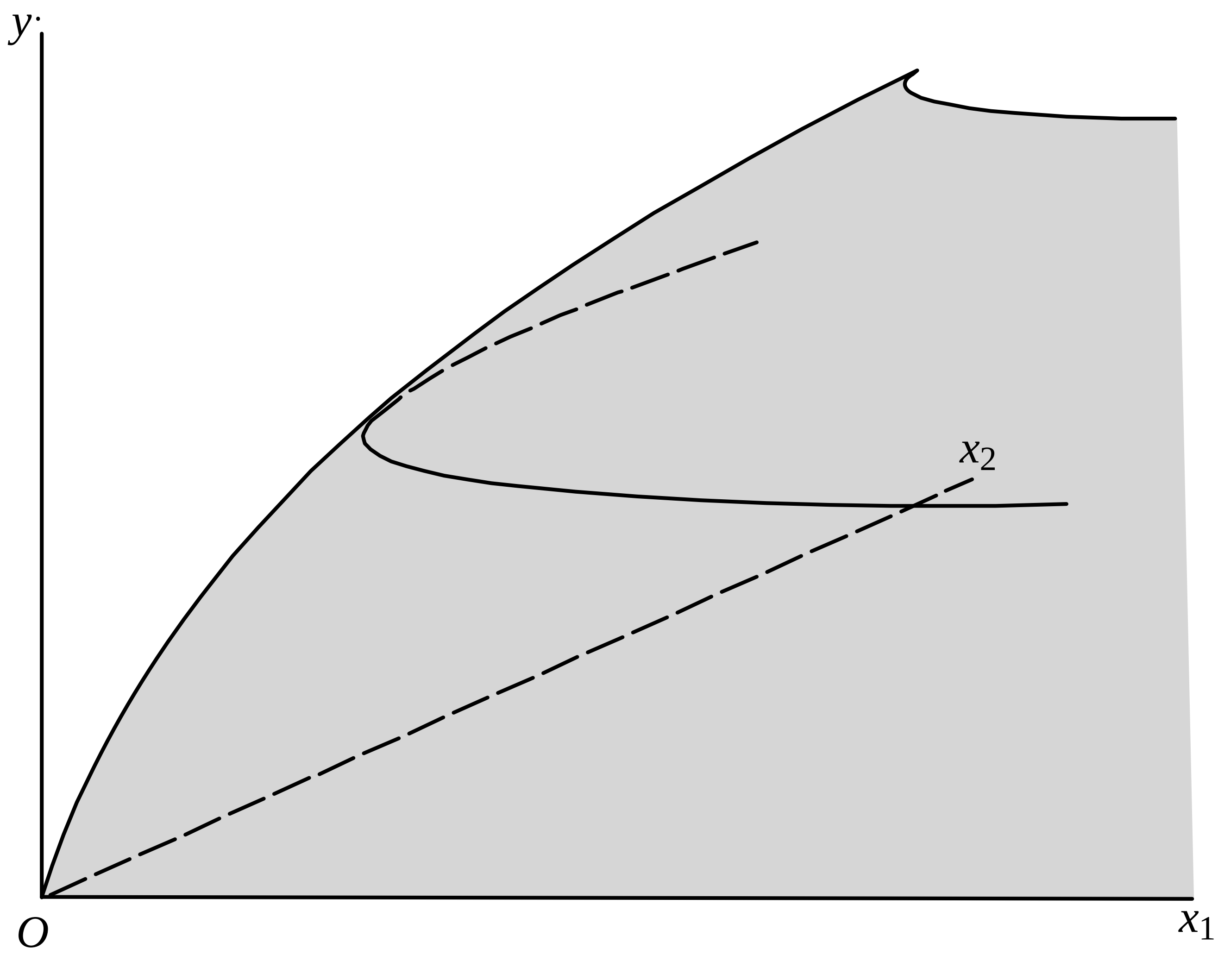
企業の生産物：　$y = (y_1, \cdots, y_m) \in R_+^m$

生産要素：　$x = (x_1, \cdots, x_n) \in R_+^n$

生産計画：　$(x, y) \in R_+^{m+n}$

定義B.4（生産可能集合—production possibility set）

実行可能な全ての生産計画の集合：$\mathbf{Y} \subset R_{+}^{m+n}$

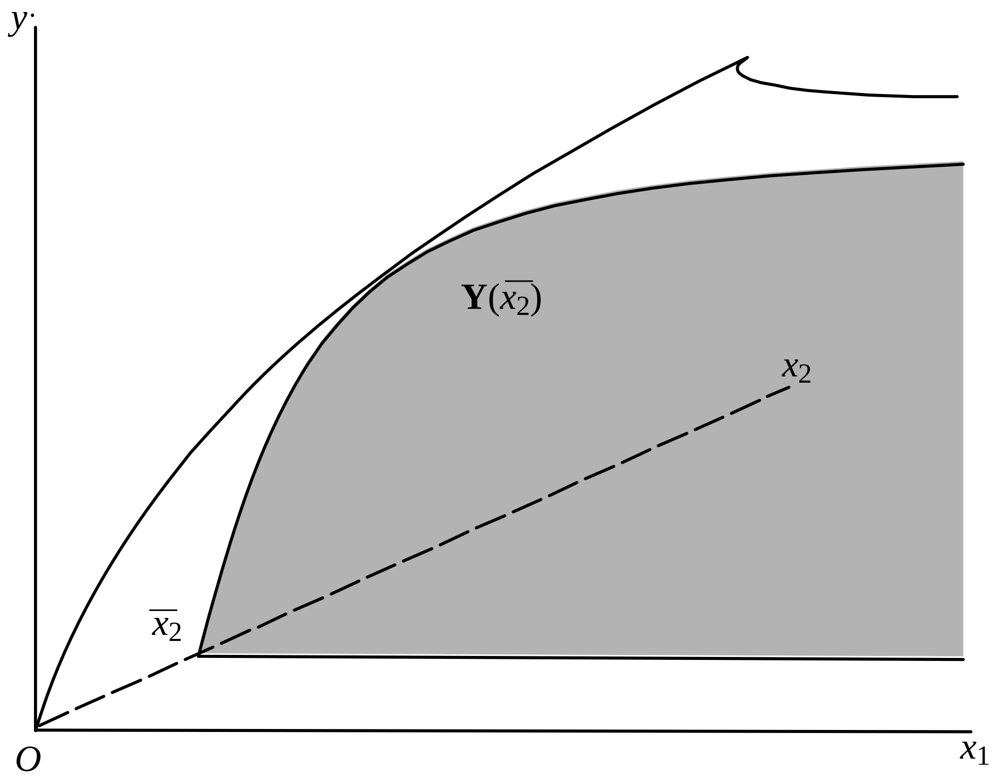


定義B.5（短期生産可能集合）

可変生産要素： $x_v \equiv (x_1, \ldots, x_k) \in R_+^k$

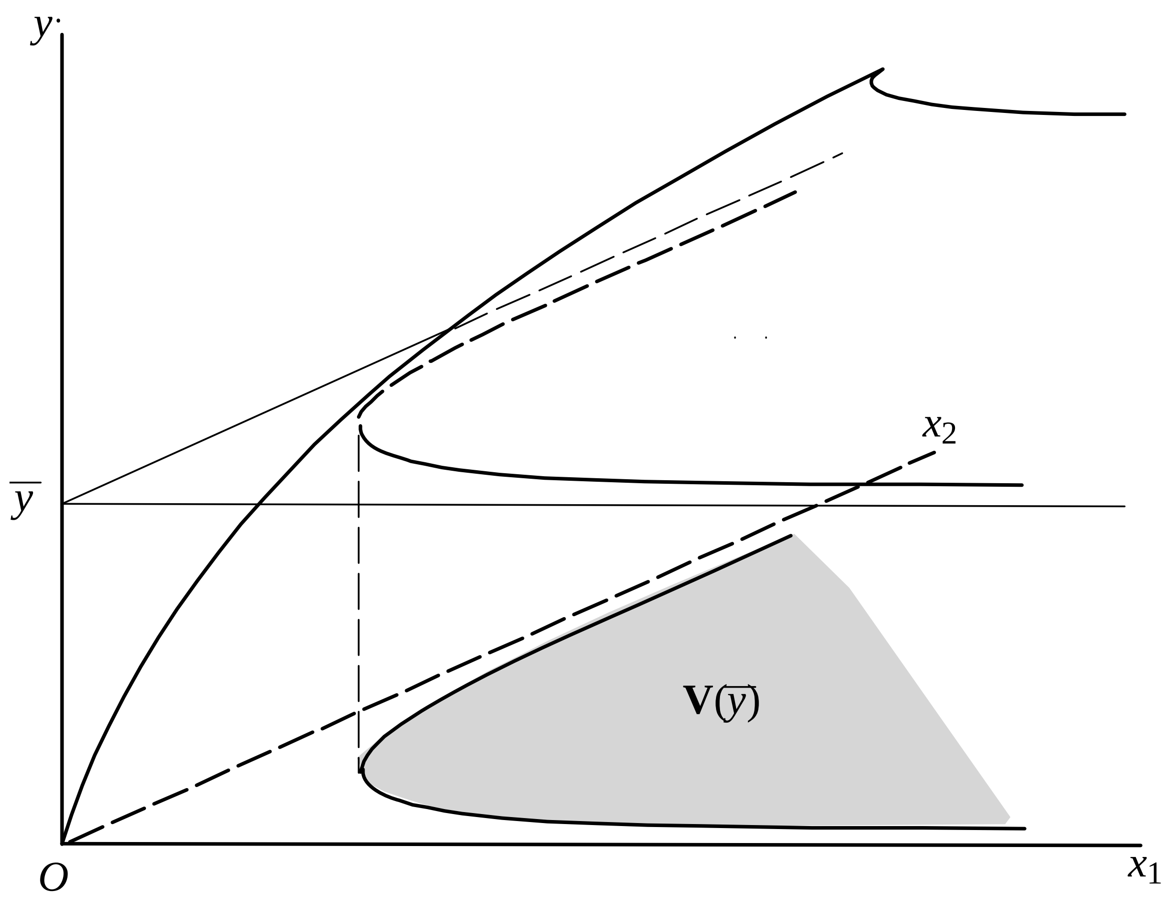
固定生産要素： $\bar{x}_f \equiv (\bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_n) \in R_+^{n-k}$

短期生産可能集合：$\mathbf{Y}(\bar{x}_f) = \{(x_v, y) \in R_+^{m+k} | (x_v, \bar{x}_f, y) \in \mathbf{Y}\}$



定義B.6（必要投入量集合—input requirement set）

$$\mathbf{V}(y) = \{x \in R^m_+ | (x, y) \in \mathbf{Y}\}$$



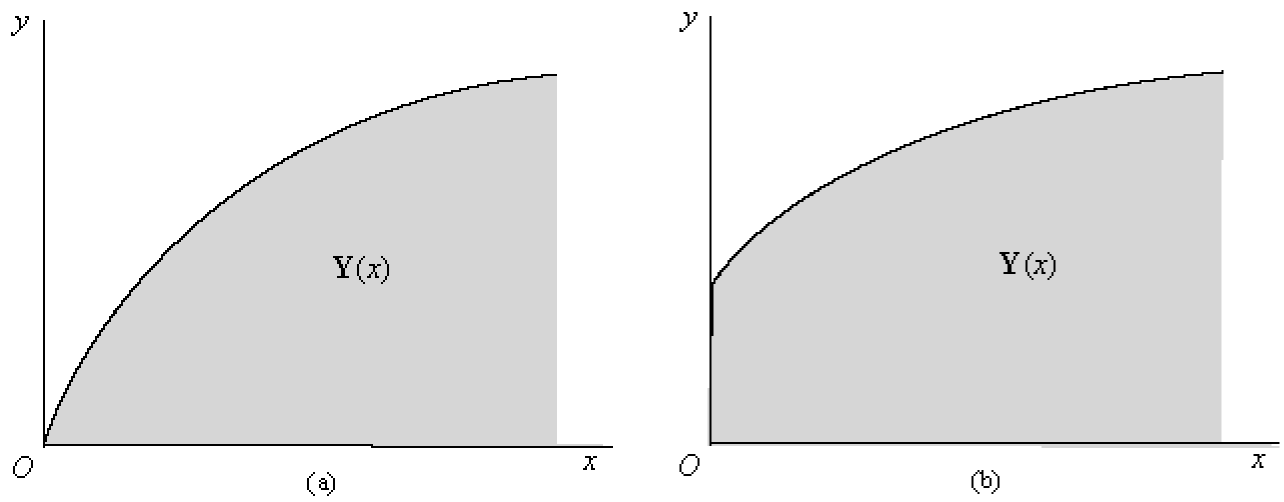
生産可能集合の性質に関する仮定

仮定B.4（非空—nonempty)　$\mathbf{Y} \neq \varnothing$

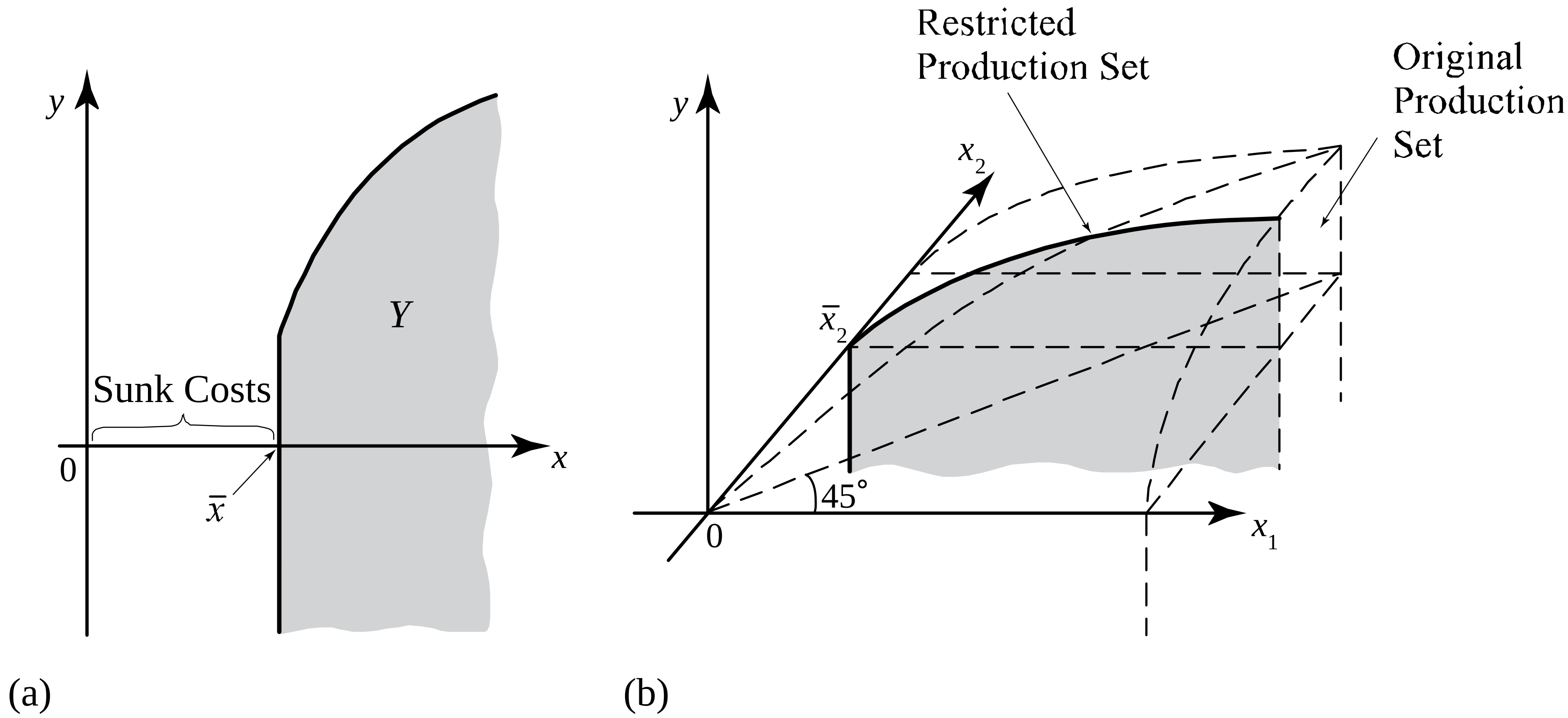
仮定B.5（閉集合—closed set）

仮定B.6（フリーランチ不可能—no free lunch）

$$y > 0 \text{ かつ } (x, y) \in \mathbf{Y} \Rightarrow x > 0$$

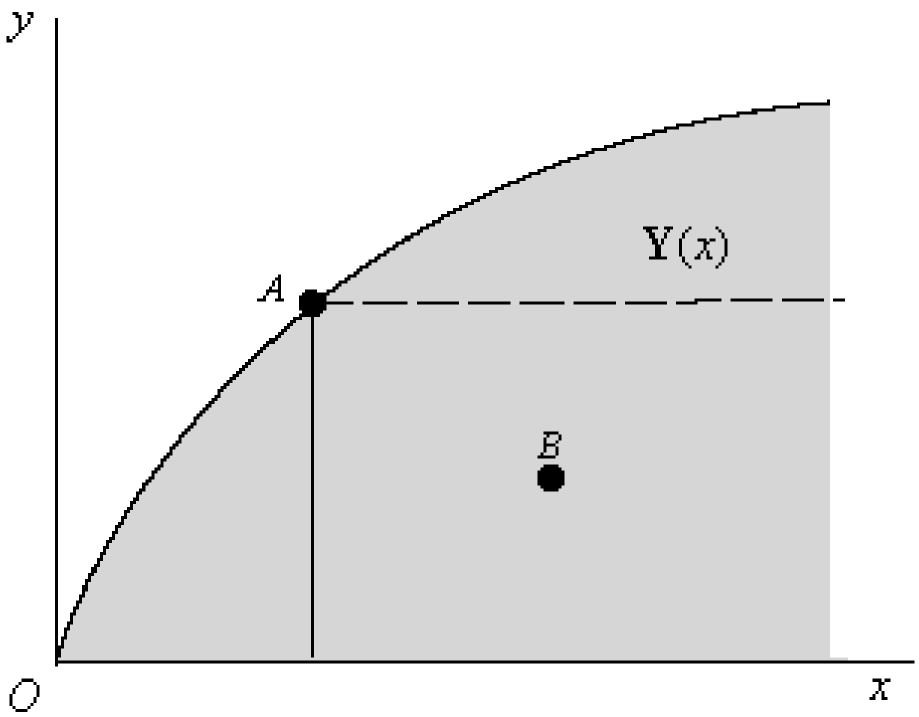


仮定B.7（操業停止可能—possibility of inaction）(0,0)∈**Y**



仮定B.8（無償廃棄可能—free disposability）

$$\left.\begin{array}{l}(x, y) \in \mathbf{Y} \\ x' \geq x \\ y' \leq y\end{array}\right\} (x', y') \in \mathbf{Y}$$

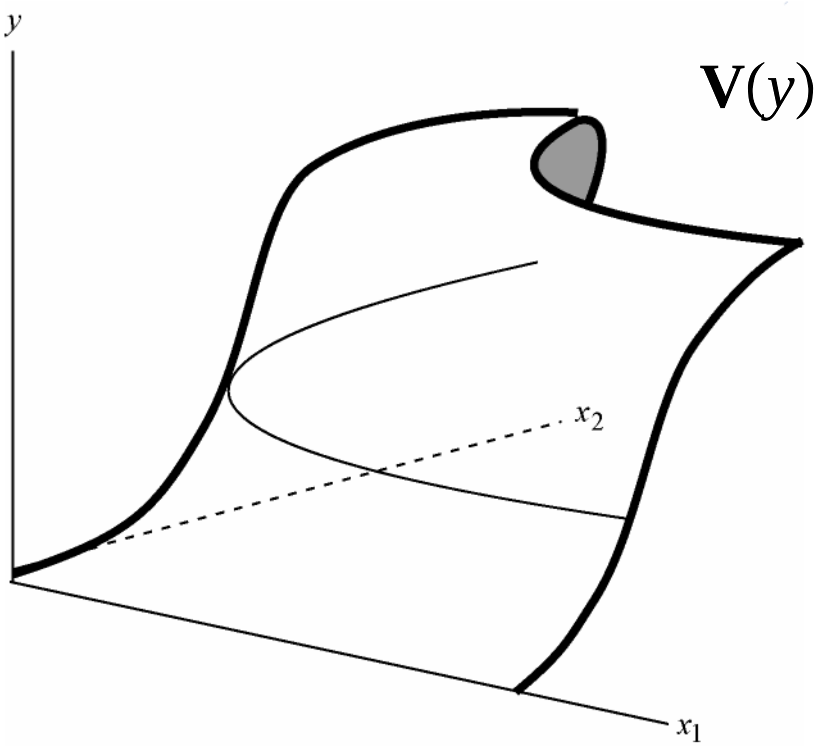


仮定B.9（必要投入量集合の凸性)

任意の $\bar{y} \in R^m_+$ につき$\mathbf{V}(\bar{y})$ は凸集合

生産財が１種類⇒

生産関数 $f(x)$: 準凹関数—quasi concave function



生産関数

$$\mathbf{V}(y) = \{x \in R^m_+ | f(x) \geq y\}$$

準凹関数定義：
これが凸集合

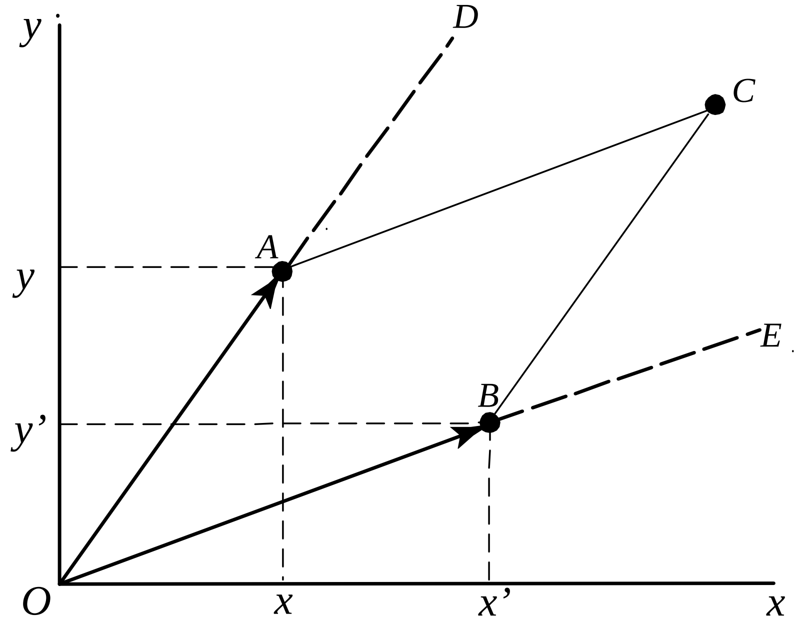
仮定B.14（可分性—divisibility）

$$\left.\begin{array}{l}(x, y) \in \mathbf{Y} \\ 0 < \lambda < 1\end{array}\right\} \Rightarrow (\lambda x, \lambda y) \in \mathbf{Y}$$

仮定B.15（加法性—additivity）

$$\left.\begin{array}{l}(x, y) \in \mathbf{Y} \\ (x', y') \in \mathbf{Y}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(x + x', y + y') \in \mathbf{Y}$$



事実B.2（凸錘）仮定B14＋B15

$\Rightarrow$ **Y**は0を頂点とする凸錘—convex cone

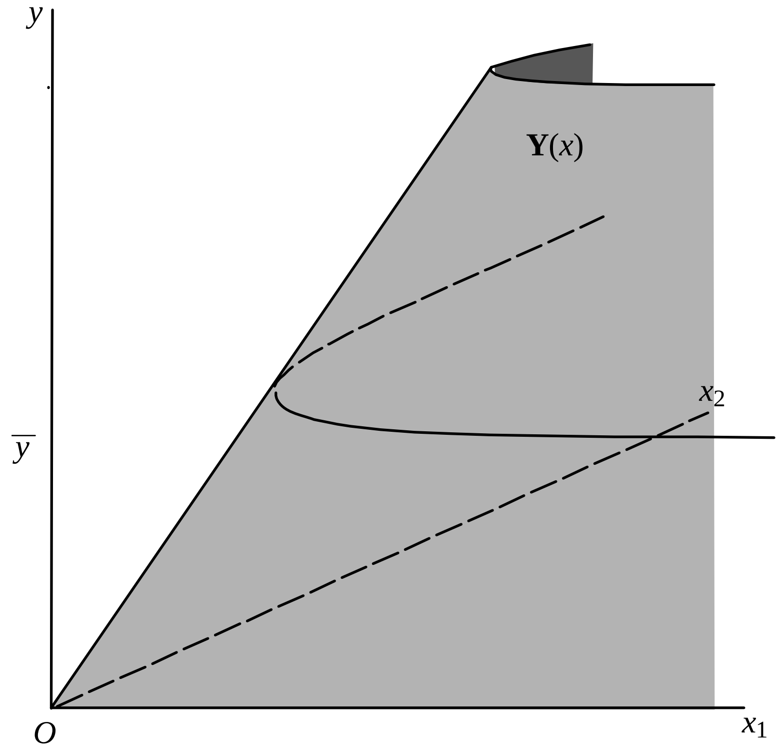
$$\left.\begin{array}{l}\alpha,\beta>0\\(x,y),(x',y')\in \mathrm{Y}\end{array}\right\}\Rightarrow(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y')\in \mathrm{Y}$$

(0,0)を頂点とする錘

$$\left.\begin{array}{l}\alpha>0\\(x,y)\in \mathbf{Y}\end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha x,\alpha y)\in \mathbf{Y}$$



事実B.1（**Y**の凸性）

Yが凸$\Rightarrow$ $\mathbf{V}(y)$も$\mathbf{Y}(\bar{x}_f)$も凸

定義B.7（効率的生産計画—efficient production plan）

$(x, y), (x', y') \in \mathrm{Y}$　かつ

$\boxed{\begin{matrix} x \le x' \\ \text{and} \\ y \ge y' \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} x < x' \\ \text{or} \\ y > y' \end{matrix}} \Rightarrow$

計画A　計画B

(x, y)は(x', y')を

優越—dominate—する

(x', y')が$(x, y) \in \mathrm{Y}$に優越するならば$(x', y') \notin \mathrm{Y}$

$\Rightarrow$ (x, y)は効率的生産計画

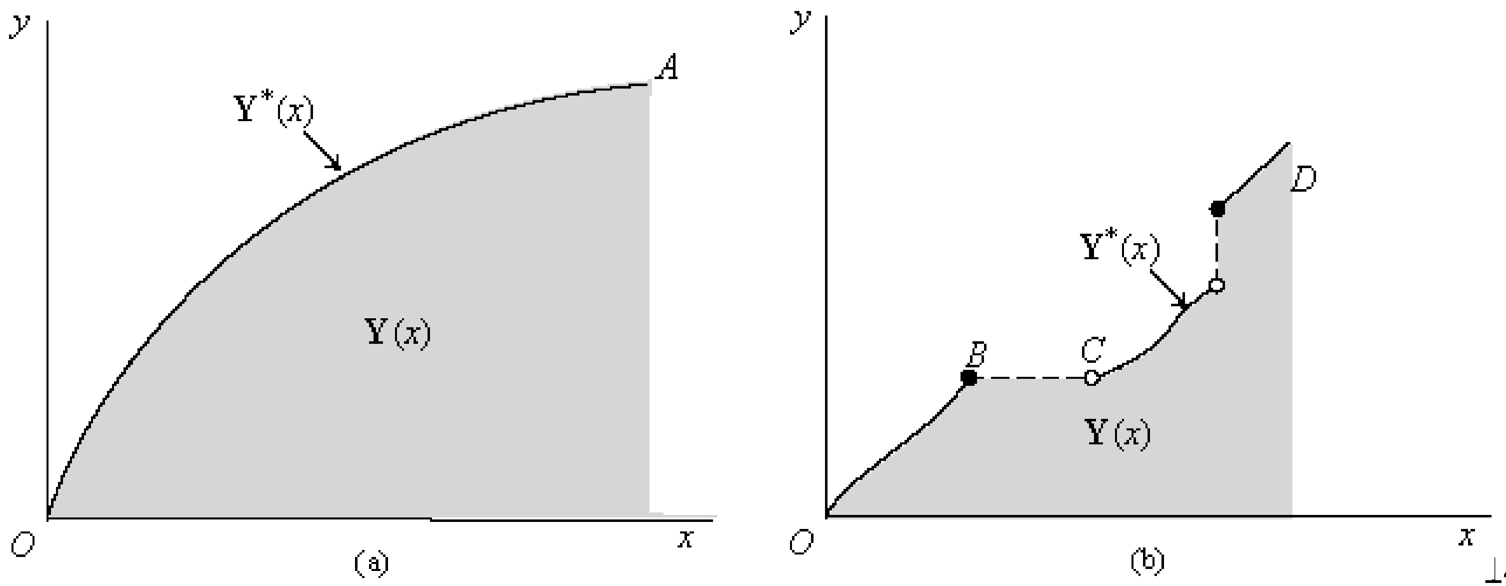
定義B.8（効率的生産集合—efficient production set）

$$\mathbf{Y}^* \equiv \{(x,y) \in \mathbf{Y} | (x',y') \text{が}(x,y)\text{に優越するならば}(x',y') \notin \mathbf{Y}\}$$

i.e., 他のどの可能な生産計画にも優越されない

定義B.9（生産関数—production function）

生産関数$F(x,y)$：$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) \in \mathbf{Y}^*$



生産財が１種類である場合

生産関数

仮定B.10（フリーランチ不可能）　$f(0) = 0$

仮定B.11（無償廃棄可能)　$f(x)$が全要素x_iにつき非減

仮定B.12（$\mathbf{V}(y)$の凸性）　$f(x)$が準凹関数

仮定B.13（Yの凸性）　$f(x)$は凹関数

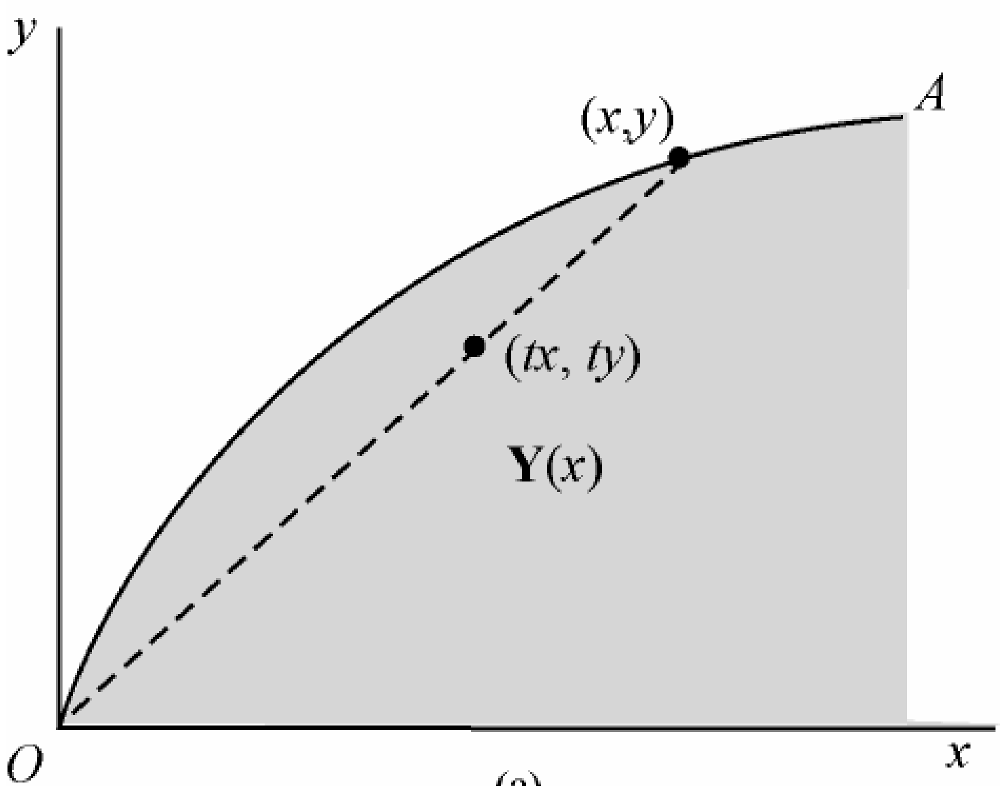
仮定B.16（可分・加法性)　$f(x)$は１次同次の凹関数

§B.2.2. 生産性の概念

<u>投入規模→産出規模の反応について</u>

定義B.10 (収穫非逓増—non-increasing returns to scale)

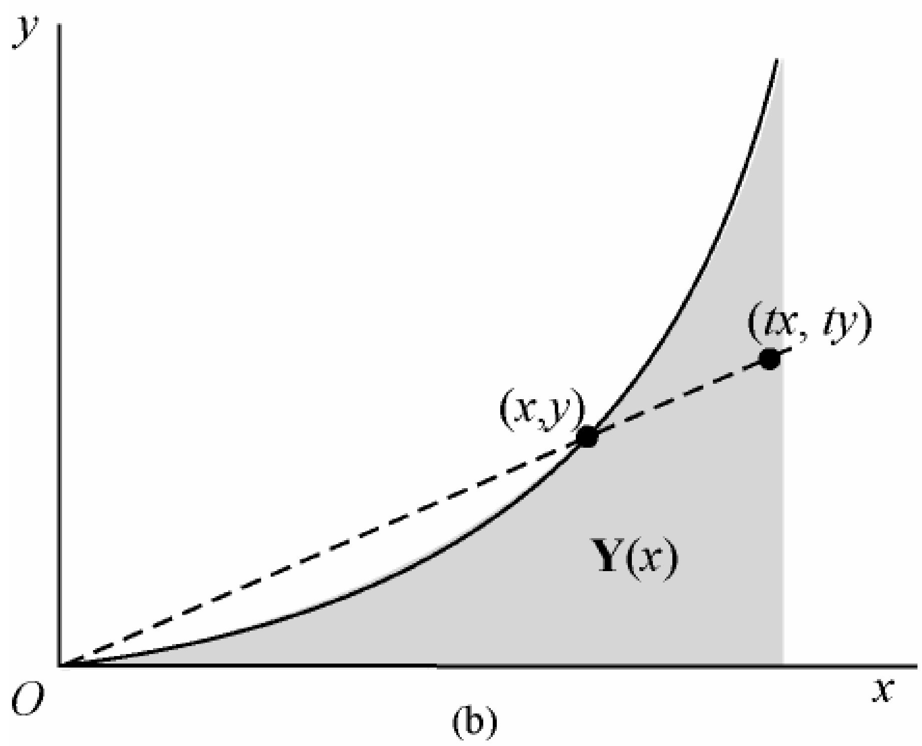
$$t \in [0, 1] \text{ につき } \quad (x, y) \in \mathbf{Y} \Rightarrow (tx, ty) \in \mathbf{Y}$$



(a)

定義B.11. 収穫非逓減—non-decreasing returns to scale

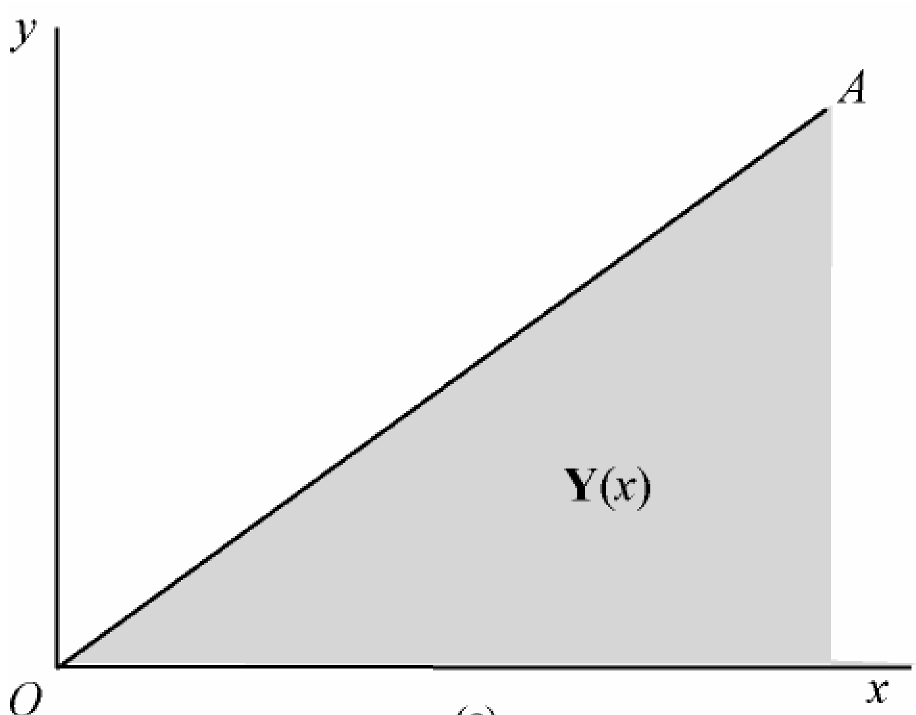
$$t \geq 1 \text{ につき } \quad (x, y) \in \mathbf{Y} \Rightarrow (tx, ty) \in \mathbf{Y}$$



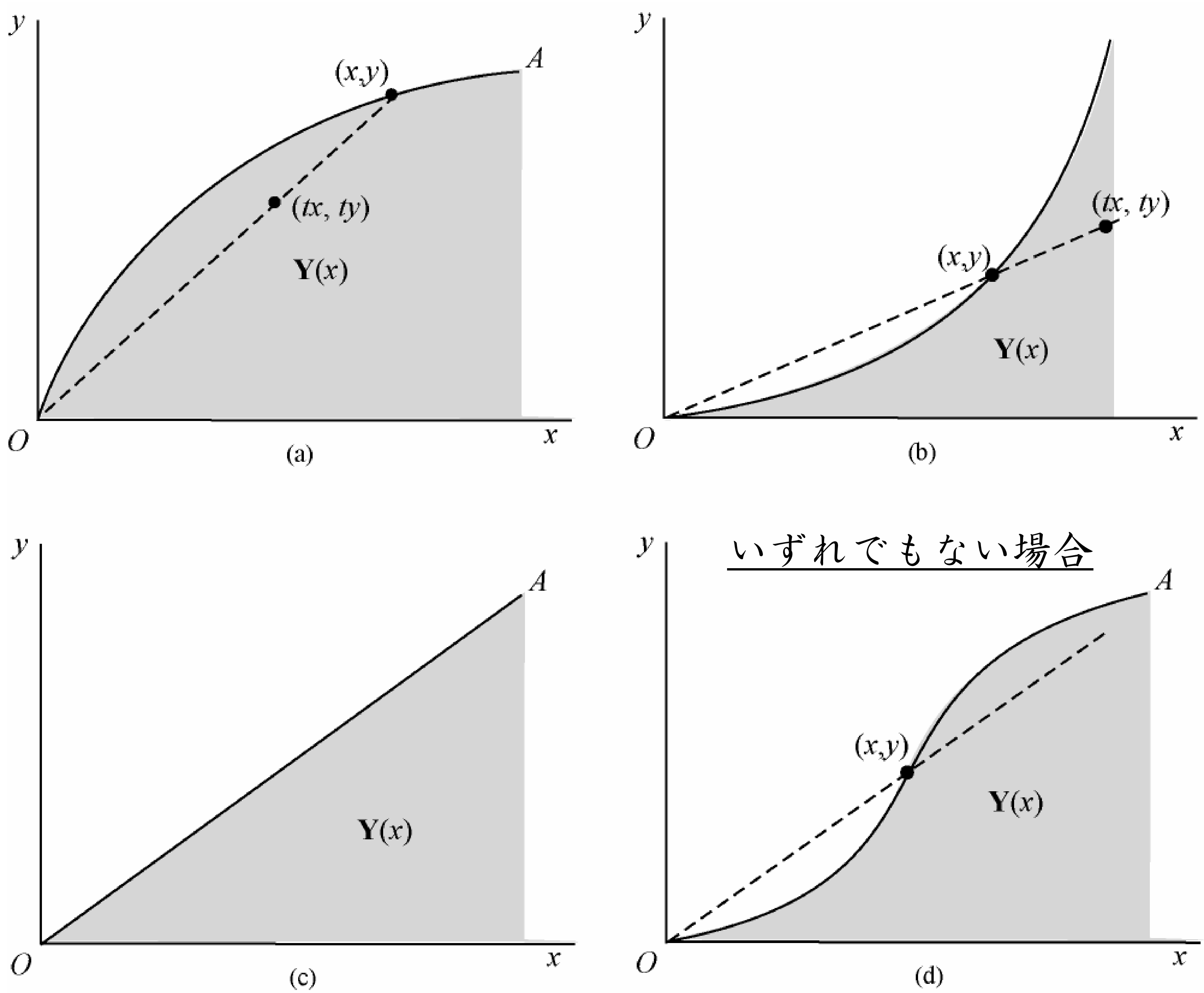
収穫非逓増＋非逓減

定義B.12. 収穫一定—constant returns to scale

$$t \geq 0 \quad \text{につき} \quad (x, y) \in \mathbf{Y} \Rightarrow (tx, ty) \in \mathbf{Y}$$



(c)


y
(x,y)
A
(tx, ty)
Y(x)
O
x
(a)
y
(tx, ty)
(x,y)
Y(x)
O
x
(b)
y
A
Y(x)
O
x
(c)
y
いずれでもない場合
A
(x,y)
Y(x)
O
x
(d)

生産財が１種類の場合

（非空・閉集合・フリーランチ不可能・無償廃棄可能を仮定）

定義B.13 (収穫逓増)

(i) 広義の意味

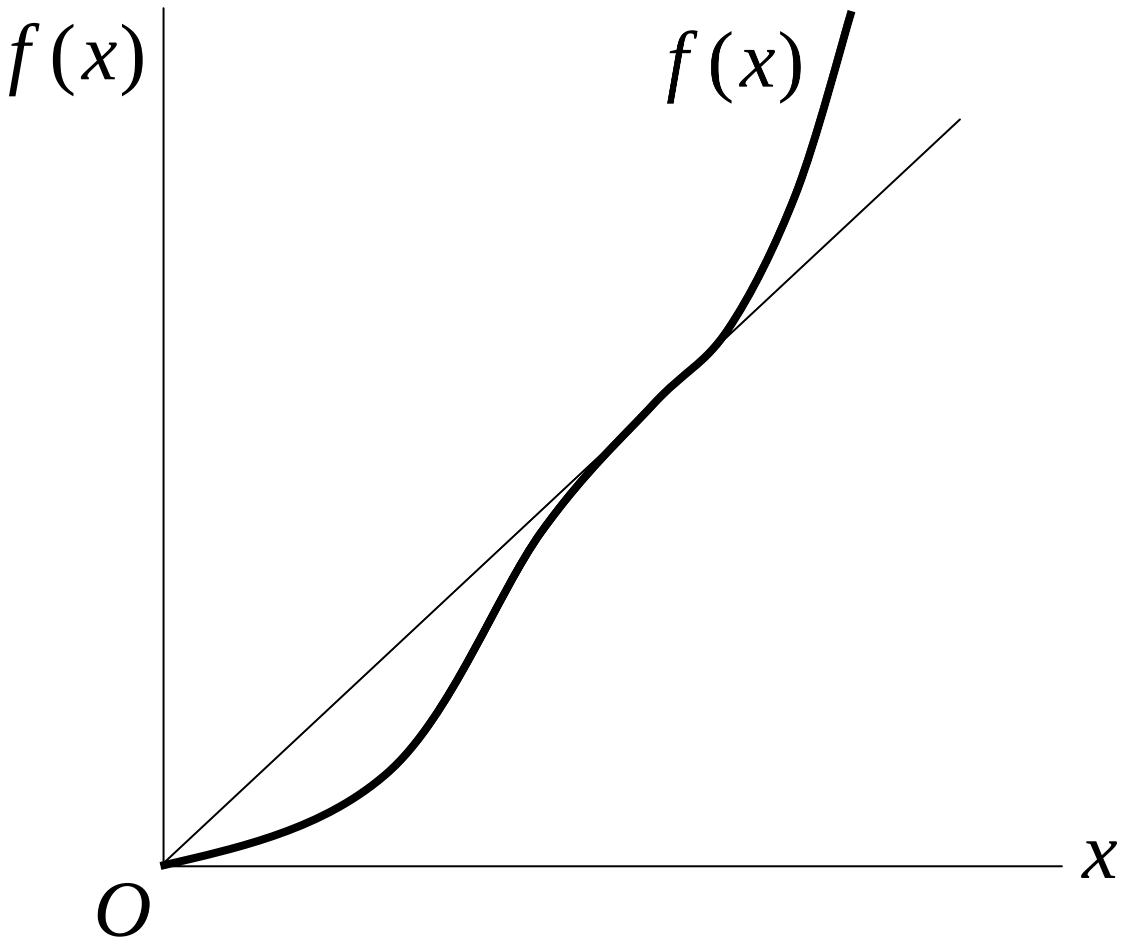
任意の$t>1,\ x>0$ について$f(tx) \geq tf(x)$

任意の$t>1$について、$f(tx) > tf(x)$となる$x>0$ が存在

(ii) 狭義の意味（応用でよく使われる定義）

任意の$t>1,\ x>0$ について$f(tx) > tf(x)$

広義の収穫逓増



定義B.14 (収穫逓減)

(i) 広義の意味

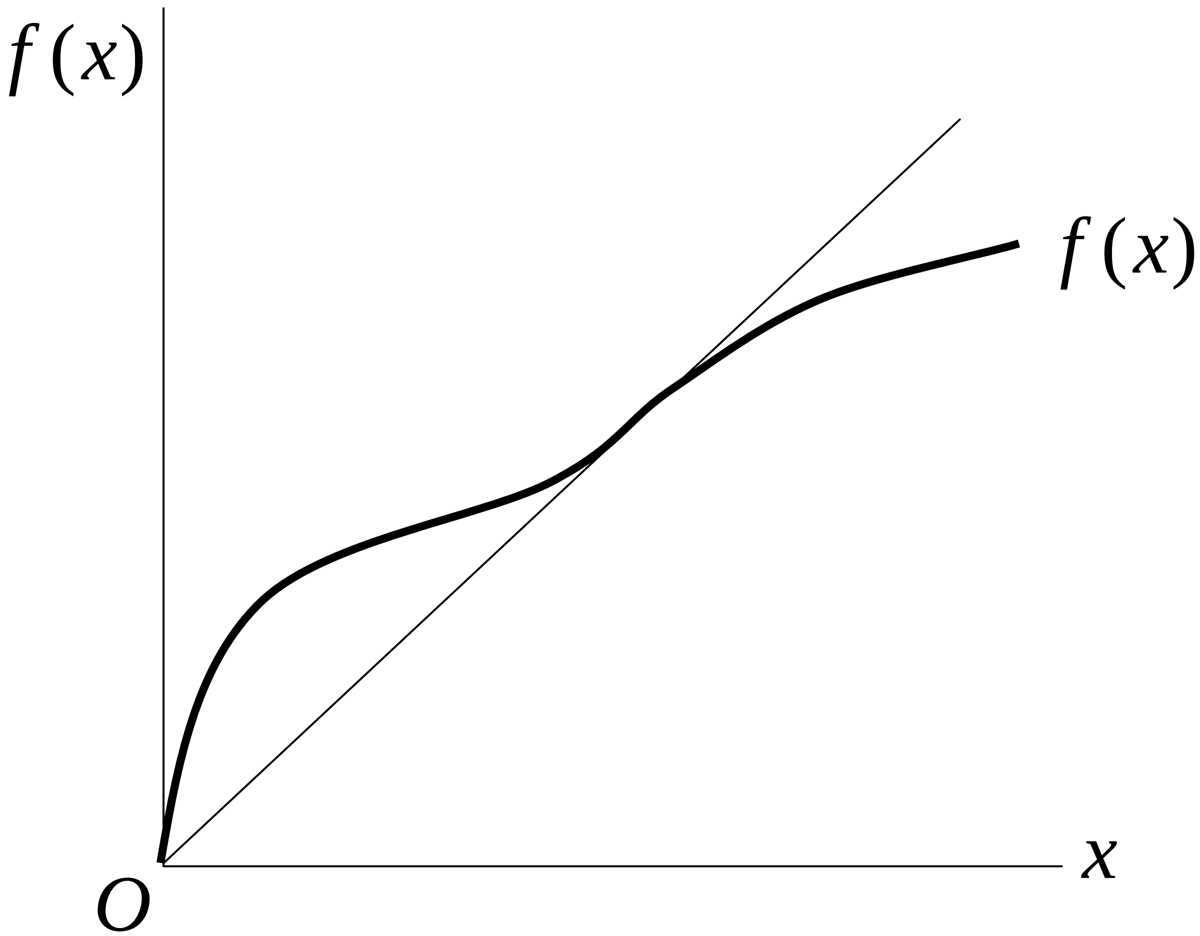
任意の$t > 1, x > 0$ について$f(tx) \leq tf(x)$

任意の$t > 1$について、 $f(tx) < tf(x)$となる$x > 0$ が存在

(ii) 狭義の意味（応用でよく使われる定義）

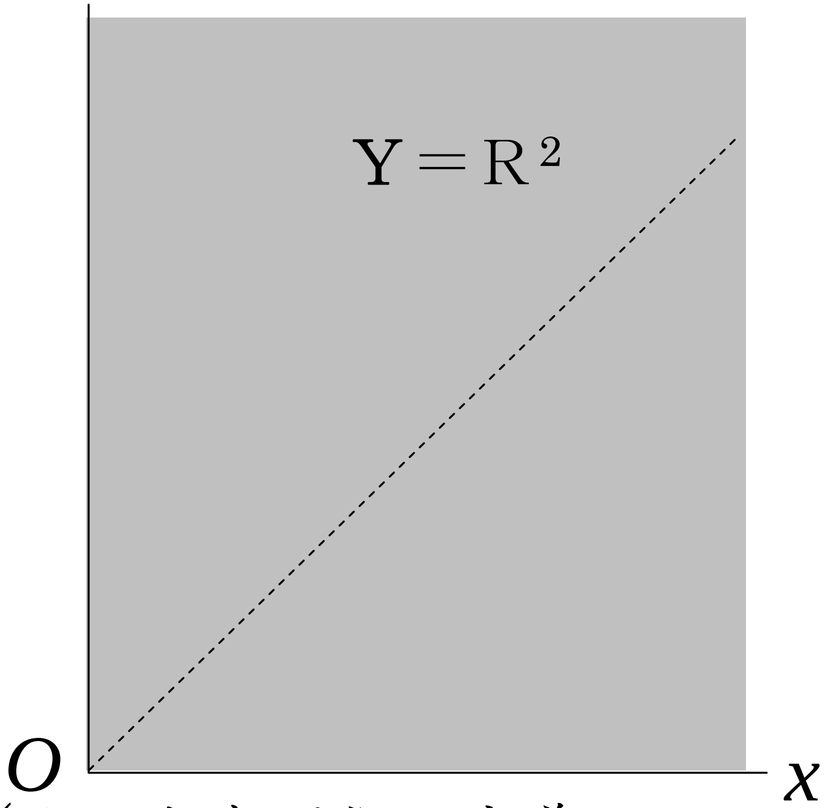
任意の$t > 1, x > 0$ について$f(tx) < tf(x)$

広義の収穫逓減

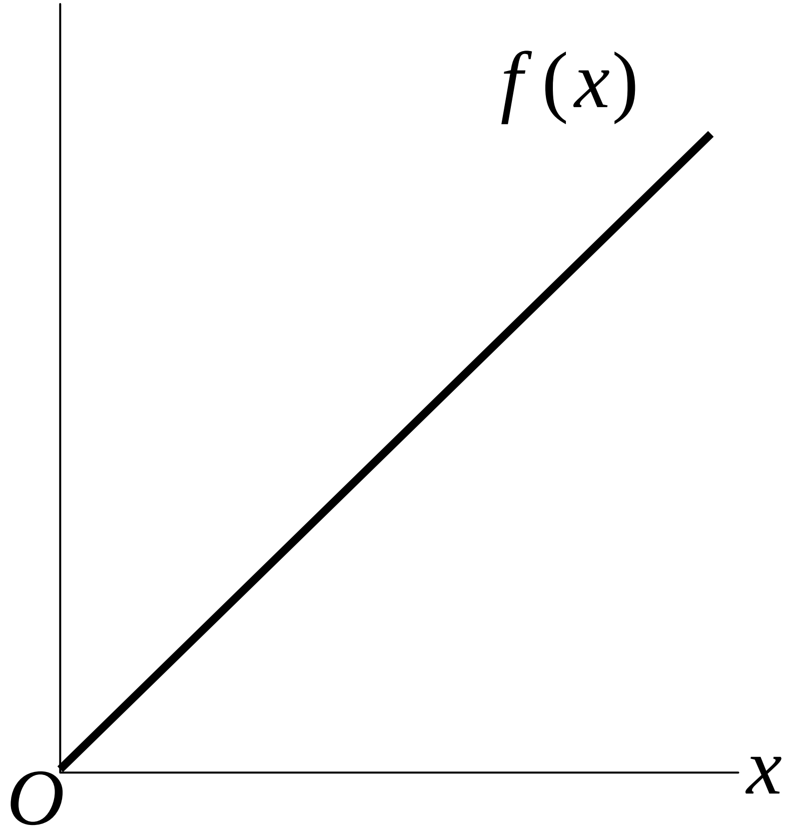


定義B.15 (収穫一定)任意の$t > 0$について$f(tx) = tf(x)$

定義Ｂ.12(広義の収穫一定)
(フリーランチ可能な場合)

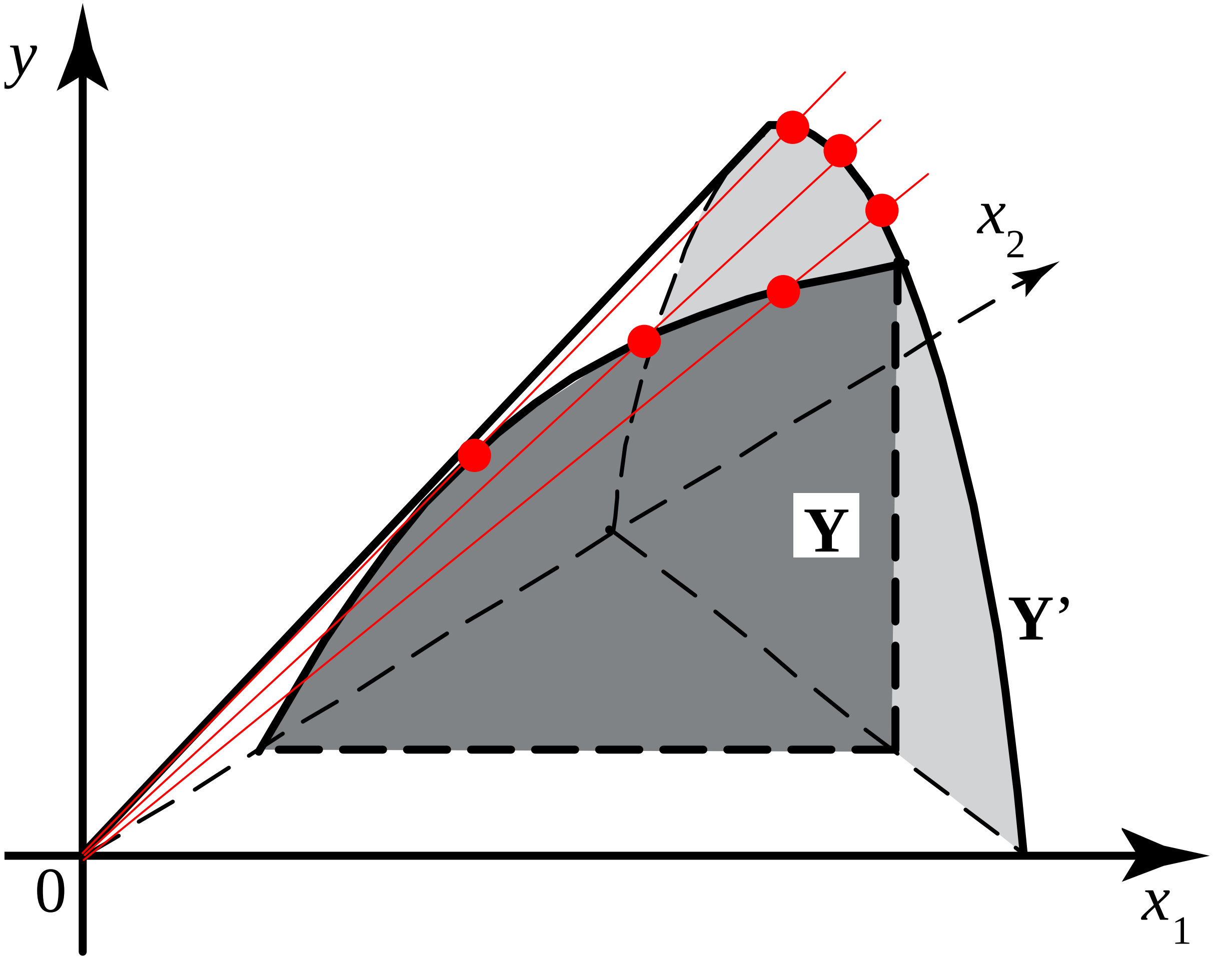


(注：生産関数は定義できない)



収穫逓減と収穫一定の解釈(命題B.1)

生産要素の希少性



定義B.16（(局所的)規模の生産性：規模の弾力性—(local) returns to scale):

投入規模の１％の増加

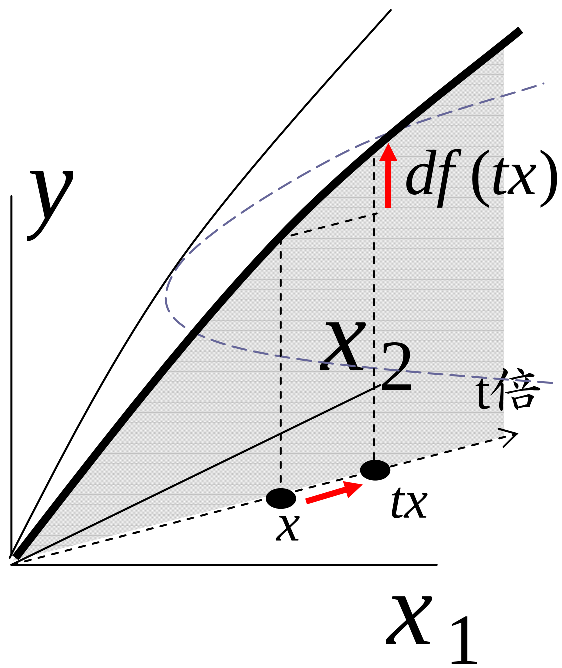
↓

産出規模の何％の増加？

$$\varepsilon(x) \equiv \frac{df(tx)}{dt}\frac{t}{f(tx)}\bigg|_{t=1}$$

↑

$$\frac{\dfrac{df(tx)}{f(tx)}}{\dfrac{dt}{t}}$$



1要素の場合

$$\varepsilon(x) = \frac{df(x)}{dx}\frac{x}{f(x)}$$

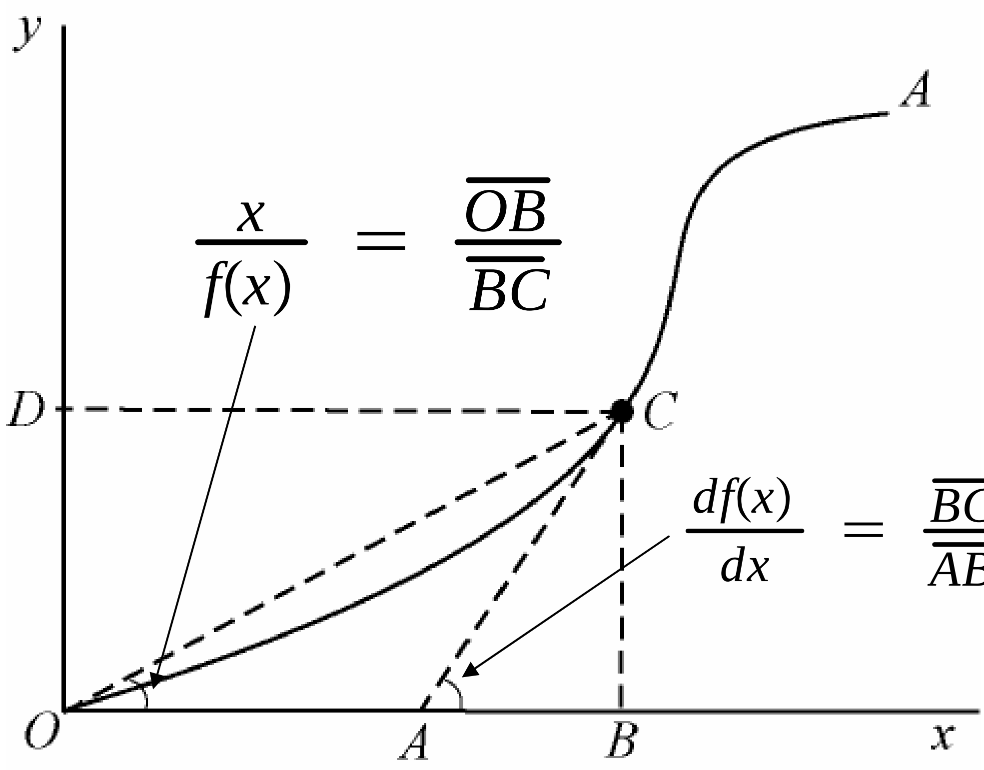
$$\varepsilon(x) = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$$

↓

$\dfrac{\text{限界生産性}}{\text{平均生産性}}$（後で定義）

↓

$$\varepsilon(x)\begin{cases} <1 & \text{: DRS} \\ =1 & \text{: CRS} \\ >1 & \text{: IRS} \end{cases}$$

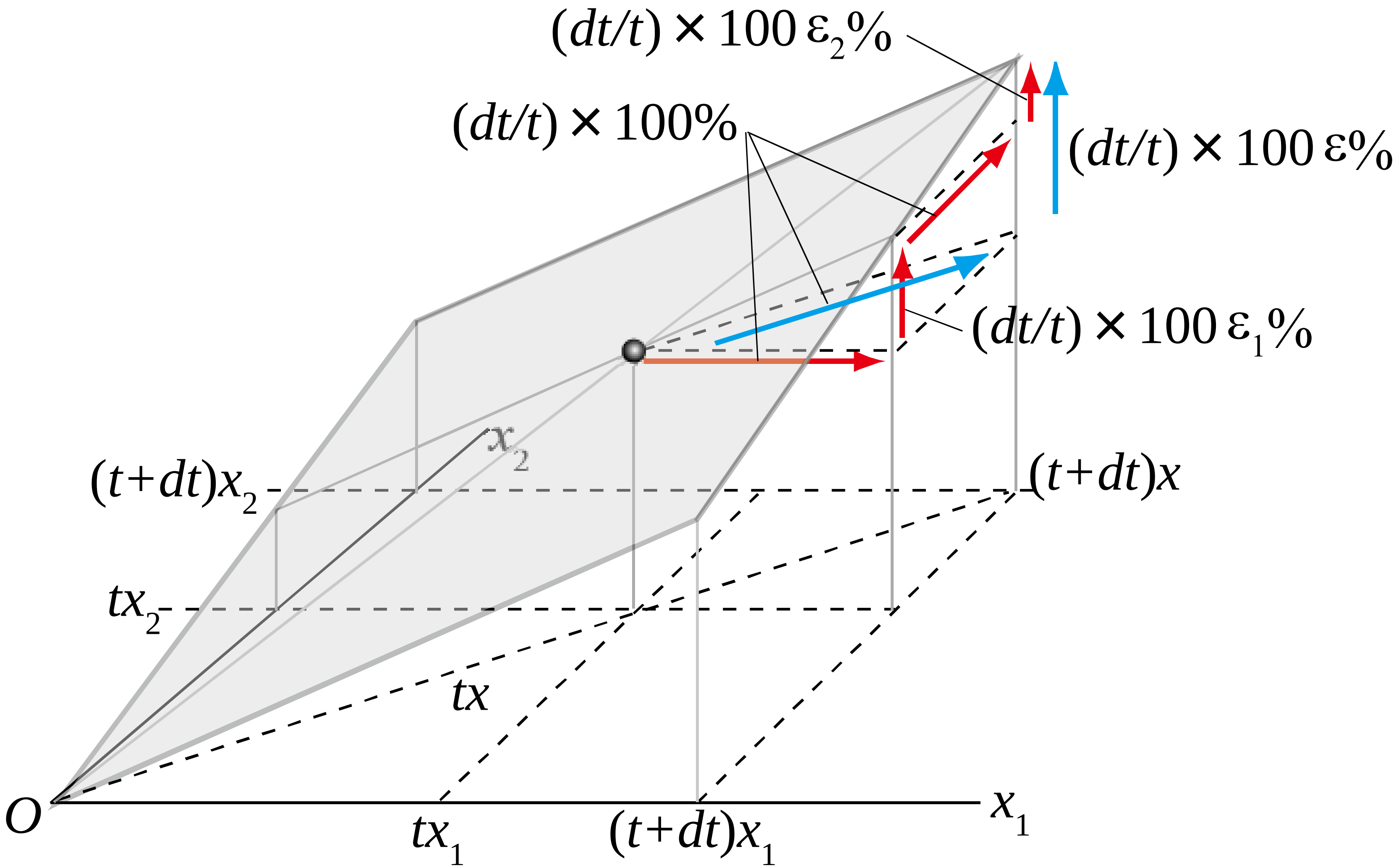


定義B.17（個々の生産要素に関する産出量弾力性－output elasticity of factor *i*)

$$\varepsilon_i(x) \equiv \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\frac{x_i}{f(x)}$$

事実B.3（生産規模の弾力性と生産要素の産出量弾力性の関係)

$$\varepsilon(x) = \sum_{\iota=1}^{n} \varepsilon_i(x)$$


(dt/t) × 100 ε2%
(dt/t) × 100%
(dt/t) × 100 ε%
(dt/t) × 100 ε1%
x2
(t+dt)x2
(t+dt)x
tx2
tx
O
tx1
(t+dt)x1
x1

定義B.18（生産要素の生産性－単一生産財の場合)

<u>第i要素i以外は固定要素とする</u>

平均生産性－average product

$$AP_i(x) = \frac{f(x)}{x_i}$$

限界生産性－marginal product

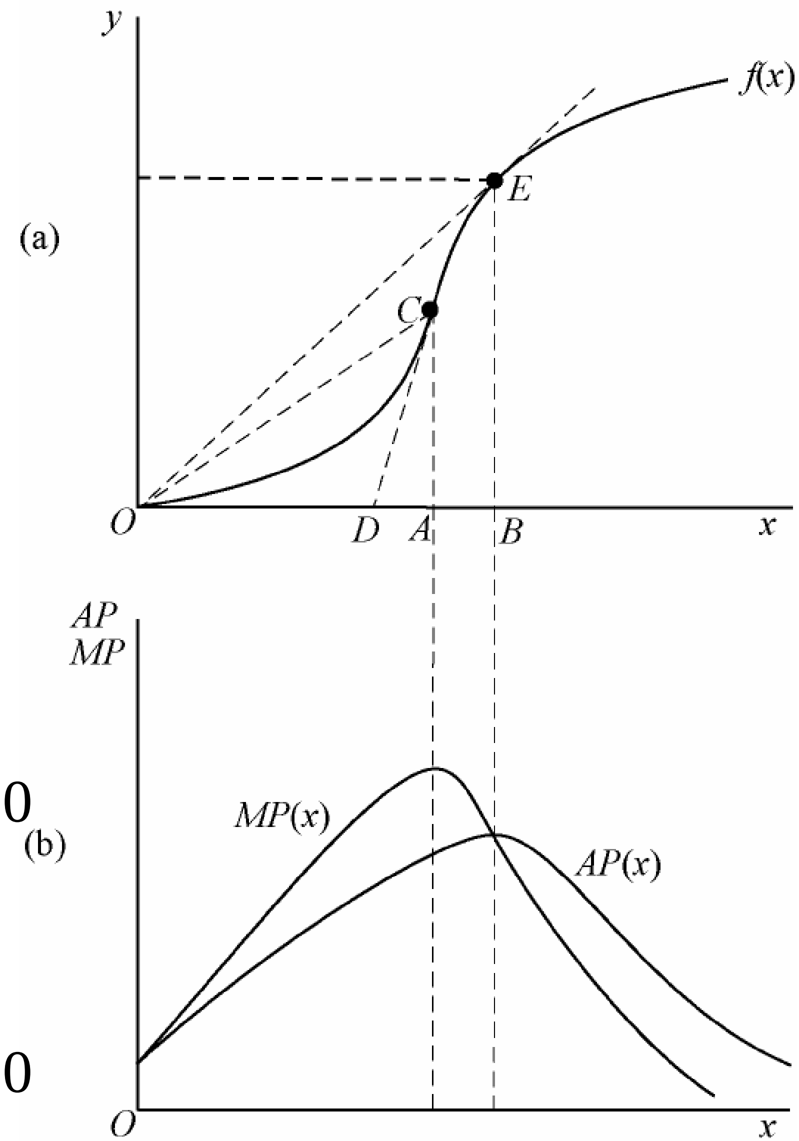
$$MP_i(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

局所的収穫逓増：

$$MP(x) > AP(x) \Rightarrow \frac{dAP(x)}{dx} > 0$$

局所的収穫逓減：

$$MP(x) < AP(x) \Rightarrow \frac{dAP(x)}{dx} < 0$$



定義B.19（生産要素の生産性―複数生産財の場合)

第i生産財の第j生産物に対する

平均生産性:

$$AP_{ij}(x,y) \equiv \frac{y_j}{x_i}$$

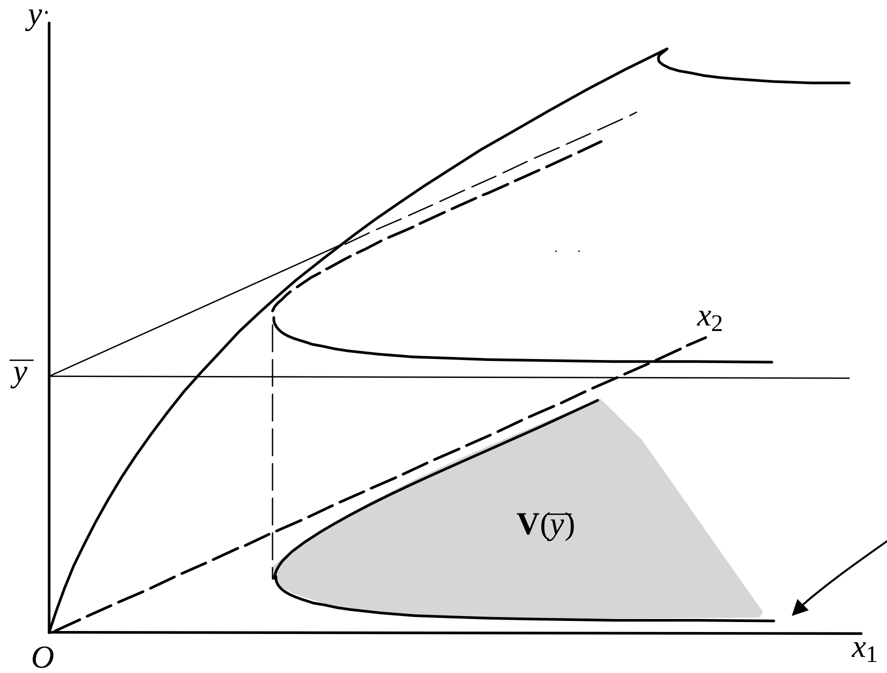
限界生産性:

$$MP_{ij}(x,y) \equiv \left.\frac{dy_j}{dx_i}\right|_{\substack{dx_h=0,h\neq i \\ dy_l=0,l\neq j}} = -\frac{\partial F(x,y)/\partial x_i}{\partial F(x,y)/\partial y_j}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y_j}dy_j = 0$$

定義B.20（等量曲線—isoquant)

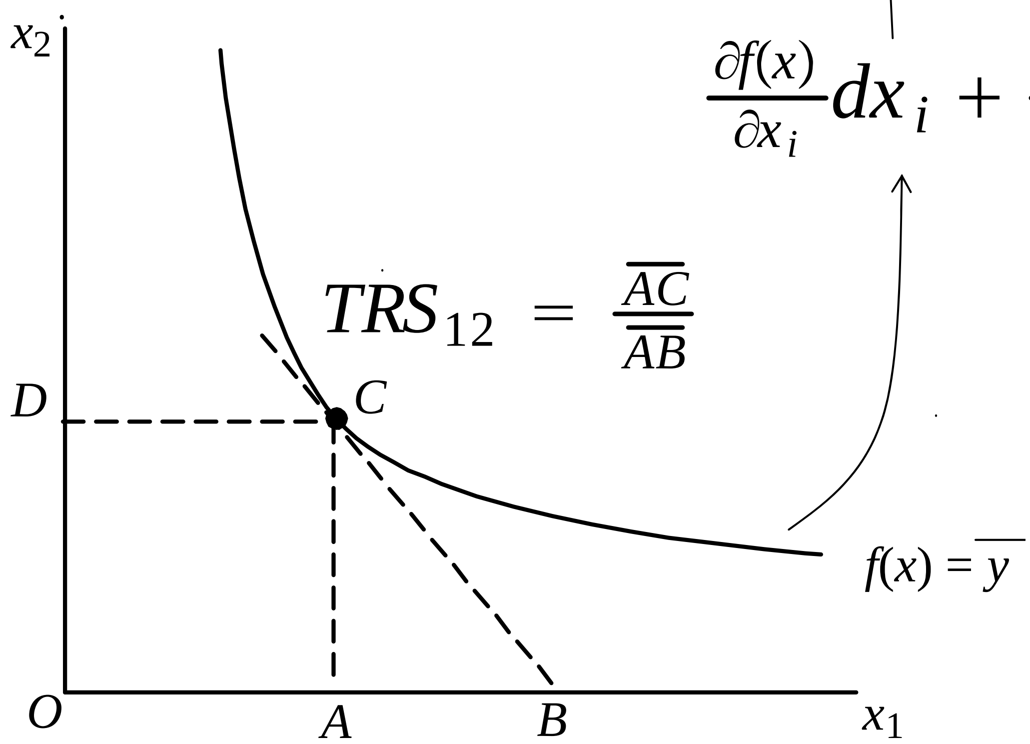
$$\mathbf{V}^*(y) \equiv \{x \in \mathbf{V}(y) | x' < x \Rightarrow x' \notin \mathbf{V}(y)\}$$



定義B.21（技術的限界代替率－単一生産の場合 —marginal rate of technical substitution)

$$TRS_{ij}(x,y) = -\frac{dx_j}{dx_i}\Bigg|_{\substack{dy=0\\ dx_k=0,k\neq i,j}} = \frac{\partial f(x)/\partial x_i}{\partial f(x)/\partial x_j}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}dx_j = 0$$



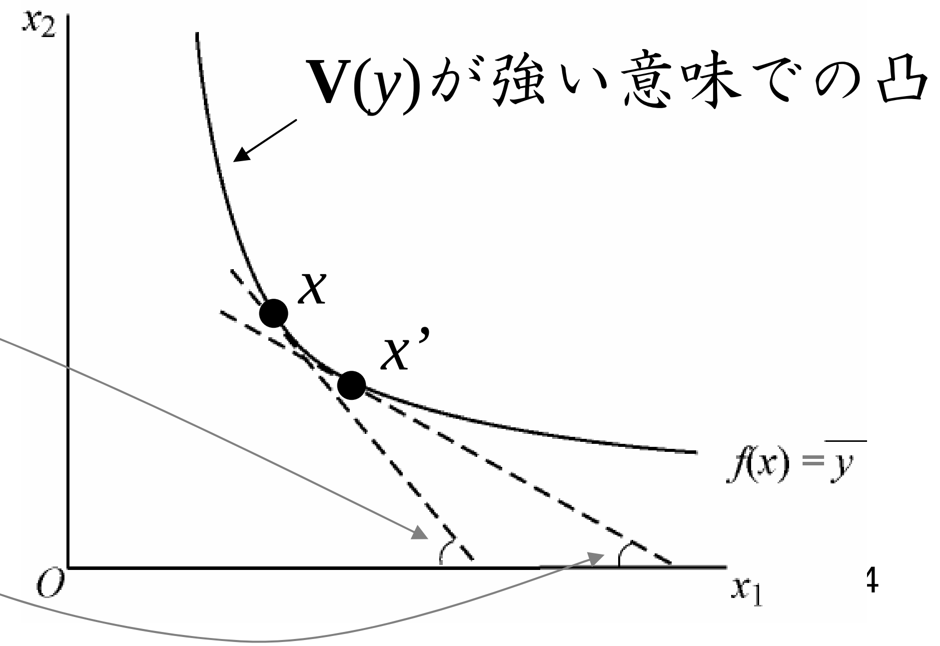
定義B.22（技術的限界代替率—複数生産財の場合)

$$TRS_{ij}(x,y) = -\left.\frac{dx_j}{dx_i}\right|_{\substack{dy_l=0 \\ dx_k=0,k\neq i,j}} = \frac{\partial F(x,y)/\partial x_i}{\partial F(x,y)/\partial x_j}$$

事実B.4（技術的限界代替率逓減の原理

—principle of diminishing TRS

$TRS_{12}(x) > TRS_{12}(x')$



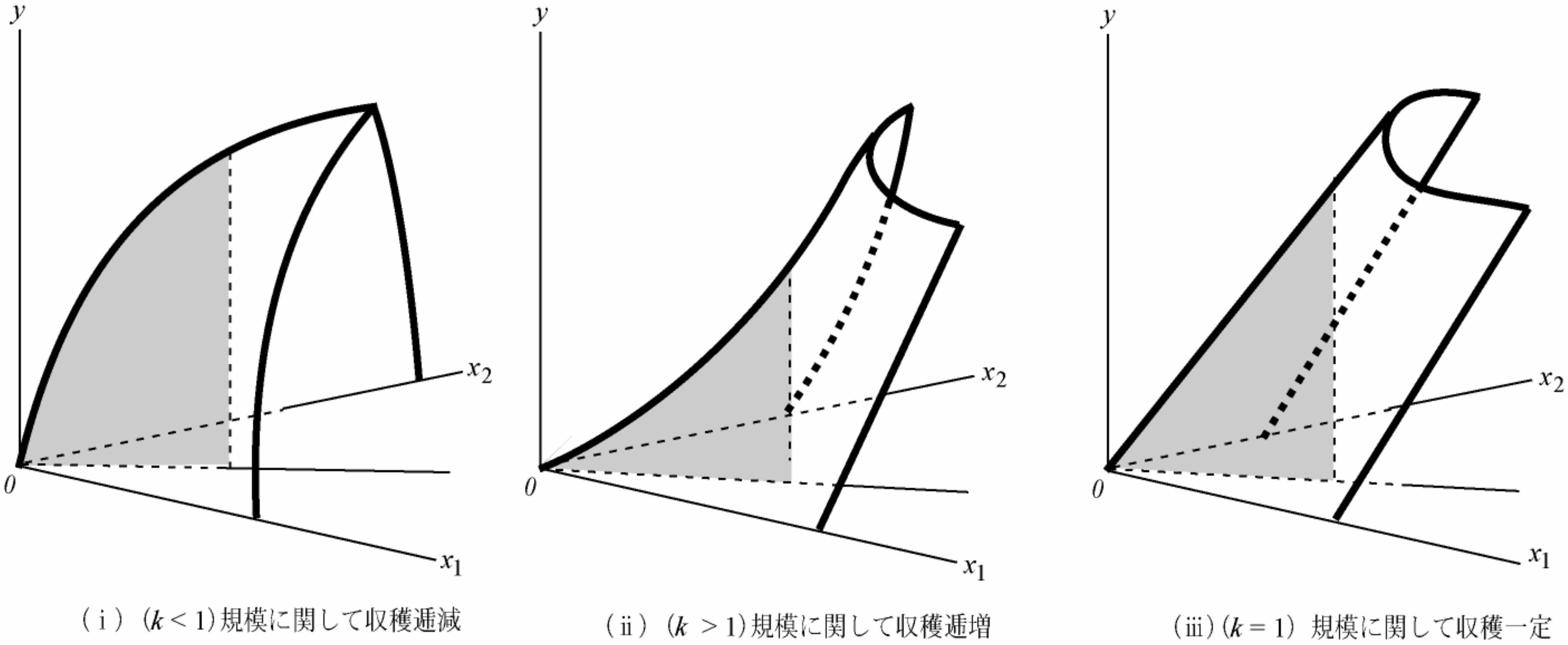
定義B.23（同次関数—homogeneous function)

関数 $f: R_+^n \to R$ が任意の$t>0$と任意の $x \in R_+^n$ につき

$$f(tx) = t^k f(x)$$

を満たすときfは「k次同次関数」であるという。

事実B.5（同次関数の次数と規模の経済性)



事実B.6（オイラー定理—Euler’s law）

関数 $f : R_{+}^{n} \to R$ が微分可能なk次同次関数$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = kf(x)$$

事実B.7（1次同次生産関数と限界生産性)

生産関数が1次同次$\Rightarrow$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} MP_i(x) x_i$$

事実B.8（同次関数の導関数)

関数$f : R_{+}^{n} \to R$ が微分可能なk次同次関数$\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \ (i = 1, \ldots, n)$$

は(k-1)次同次の同次関数。

定義B.24（ホモセティック関数—homothetic function)

$f : R^n_+ \to R$ が微分可能な同次関数

$g : R \to R$ が微分可能な単調増加関数

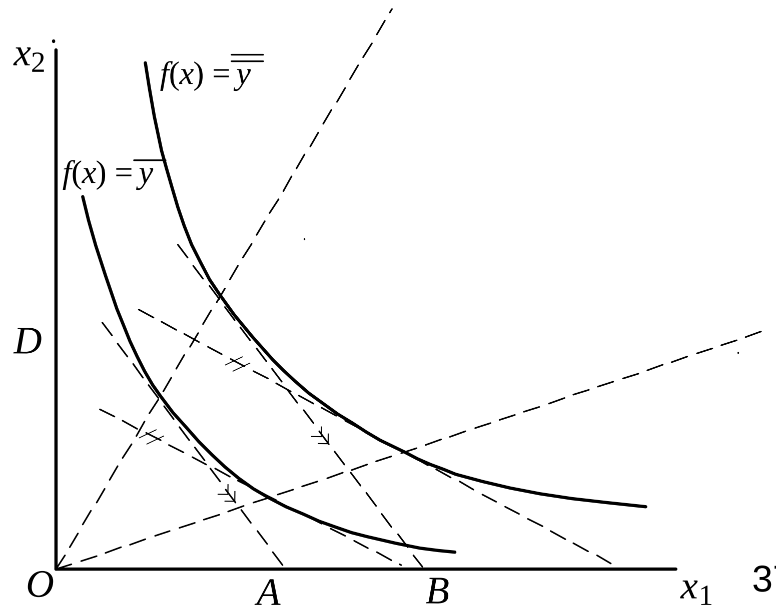
$\to \ \phi(x) \equiv g(f(x))$ をホモセティック関数と呼ぶ

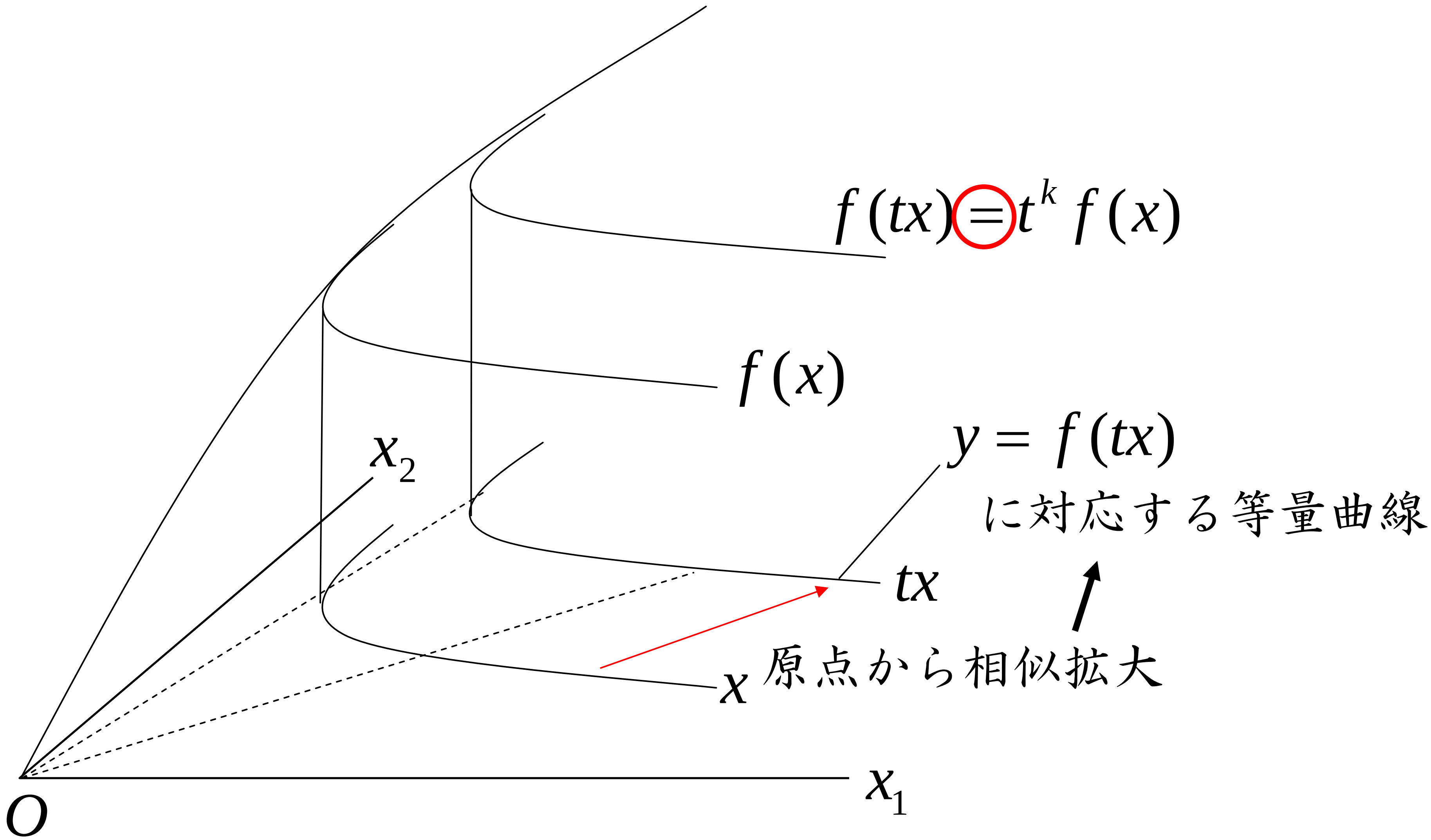
事実B.9（ホモセティック関数の相似性)

TRSは生産要素投入量比のみに依存

⇔等量曲線は原点に関して相似

⇔拡張経路は直線




$f(tx) = t^k f(x)$
$f(x)$
$y = f(tx)$
に対応する等量曲線
x_2
tx
x
原点から相似拡大
x_1
O

定義B.25（生産物変形曲線—product transformation curve/
production possibility frontier)

生産財間の産出量トレードオフ

$$T(x) \equiv \{y \in R^m_+ | (x, y) \in \mathbf{Y}^*\}$$

投入ベクトル所与の下での
実行可能な効率的産出ベクトルの集合

(a)