上級ミクロ経済学（前半）
第一週宿題（生産技術）

京都大学経済研究所　森知也

平成 19 年 3 月 19 日

問題 B.1 (収穫一定) 生産物が 1 種類の場合、(i) 無償廃棄可能の仮定の下で、生産関数 $f(\cdot)$ が存在する生産可能集合 $\mathbf{Y}$ が収穫一定であることの必要十分条件は $f(\cdot)$ が 1 次同次であることを証明せよ。(ii) 無償廃棄の可能性が満たされないとき、生産関数 $f(\cdot)$ が *1* 次同次であっても、生産可能集合 $\mathbf{Y}$ が収穫一定でない場合を例示せよ。$(iii)\mathbf{Y}$ が無償廃棄可能かつ収穫一定であっても、生産関数が存在しない場合を例示せよ。

問題 B.2 (収穫逓増・逓減) 生産要素・生産財ともに 1 種類とし、投入量 x と産出量 y の関係が微分可能な生産関数 $y = f(x)$ により表されるとする。$f(\cdot)$ が *(*狭義の意味の*)* 収穫逓増であるとき、以下の問に答えよ。(i) 平均生産物 $(f(x)/x)$ は非減少であるか？理由も述べよ。(ii) 限界生産物 $(df(x)/dx)$ は非減少であるか？理由も述べよ。同様に、$f(\cdot)$ が (狭義の意味の) 収穫逓減であるとき、(iii) 平均生産物 $(f(x)/x)$ は非増加であるか？理由も述べよ。(iv) 限界生産物 $(df(x)/dx)$ は非増加であるか？理由も述べよ。

問題 B.3 (ホモセティック生産関数) 生産関数 $f(x)$ がホモセティックであるとき、(i) 点 x と x' が同一等量曲線上にあるなら (*i.e.,* $f(x) = f(x')$)、点 tx と tx'(ただし、$t > 0$) も同一等量曲線上にあること、(ii) 技術的限界代替率は投入ベクトル x と tx の下で一致することを示せ。

問題 B.4 (収穫一定下での限界代替率逓減の法則) [1](i) 収穫一定の生産関数 $Q = F(K, L)$ は $k = K/L$ とすれば

$$F(K, L) = f(k)L \tag{1}$$

と表せることを示せ。

(ii) さらに、生産関数が強い意味の凹関数であるとする。このとき、等量曲線 $\{(K, L) : F(K, L) = Q\}$ に沿って L が増加した時に $(dL > 0)$、限界代替率 $TRS \equiv -dK/dL = F_L/F_K$ が逓減する $(dTRS/dL|_{F(K,L)=Q} < 0)$ ための条件は

$$-\frac{F_L}{F_K}\frac{F_{LK}F_K - F_LF_{KK}}{F_K^2} + \frac{F_{LL}F_K - F_LF_{KL}}{F_K^2} < 0 \tag{2}$$

で与えられ、これは

$$f''(k) < 0 \tag{3}$$

と同値であることを示し、(3) の経済学的意味を説明せよ。

(iii) 限界代替率は生産要素投入比率 k のみに依存し

$$TRS(k) = \frac{f(k)}{f'(k)} - k \tag{4}$$

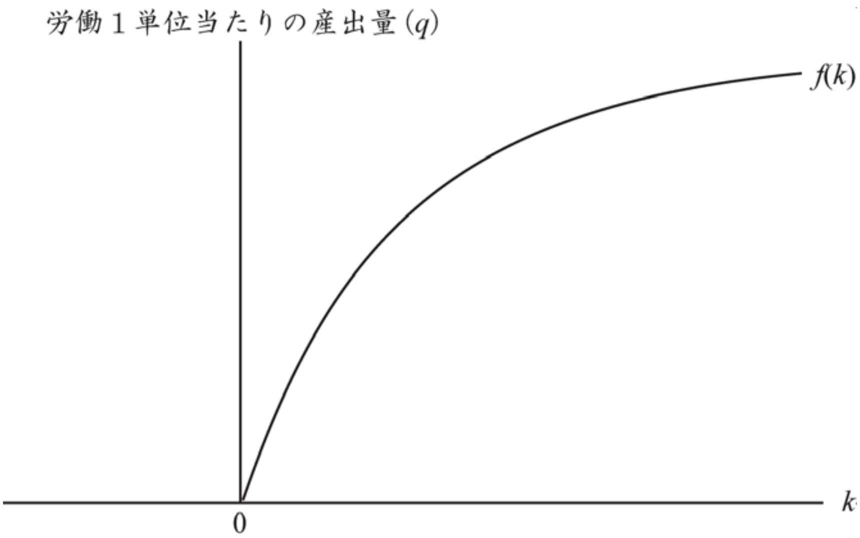
と表せることを示し、(3) 式は

$$\frac{dTRS(k)}{dk} > 0 \tag{5}$$

と同値であることを示せ。

(iv) 下図、第一象限には、$f'(k) > 0, f''(k) < 0$ を満たす f のグラフが描かれている。これを用いて、限界代替率逓減の法則 (5) を説明せよ。

[1] 2 階微分可能性等、適当な仮定を適宜加えて答えよ。


労働１単位当たりの産出量(q)
$f(k)$
k
0

上級ミクロ経済学（前半）
第二週宿題（費用最小化問題）

京都大学経済研究所　森知也

平成 19 年 4 月 18 日

問題 B.5 (費用関数の性質) 産出量 1 の下で、制約付生産要素需要関数が以下で与えられるとき、パラメタ a, b, c の値を求めよ。

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 + 3w_1^{-\frac{1}{2}} w_2^a \\
x_2 &= 1 + bw_1^{\frac{1}{2}} w_2^c
\end{aligned}
$$

問題 B.6 (費用関数の性質) (i) θ_i を第 i 生産要素の投入費用が生産費用に占めるシェアとするとき、任意の費用関数について以下が成立することを示せ。

$$\theta_i = \frac{\partial \ln C(w, y)}{\partial \ln w_i}$$

(ii) (i) の性質を以下のコブ＝ダグラス型費用関数について確認せよ。

$$C(w, y) = Aw_1^\alpha w_2^\beta y$$

問題 B.7 (CES 生産関数の導出) 収穫一定な生産関数 $F(K, L)$ で、代替の弾力性

$$\sigma = \frac{d \log k(\omega)}{d \log \omega}$$

が定数で与えられる *CES* 生産関数を考える。ただし、ω は労働者賃金・資本レンタル価格比率、$k(\omega)$ は ω の下での最適資本・労働比率とする。

(i) このとき

$$\omega = Bk^{1/\sigma}$$

と表せることを示せ。ただし、$B > 0$ は定数。

(ii) 費用最小化の 1 階条件

$$\omega = TRS(k)$$

を用いて

$$\frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{1}{k} - \frac{Bk^{\frac{1}{\sigma}-2}}{1 + Bk^{\frac{1}{\sigma}-1}}$$

となることを示せ。

(iii) 労働者 *1* 人当たり生産関数は

$$f(k) = (Ck^{-\beta} + D)^{-1/\beta}$$

ただし、C, D は正の定数、$\beta \equiv (1 - \sigma)/\sigma$ であり 0 以外の定数とする（つまり、$\sigma \neq 1$ とする）。元の生産関数は

$$F(K, L) = (CK^{-\beta} + DL^{-\beta})^{-1/\beta}$$

で表されることを示せ。

問題 B.8 (コブ=ダグラス関数) (i) コブ=ダグラス型生産関数

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, A > 0$$

は (K を資本、L を労働と呼ぶ)、$k = K/L$ とすれば、労働者 1 人当たりの生産量 $f(k) = F(K,L)/L$ が

$$f(k) = Ak^{\alpha}$$

となることを示せ。

(ii) このとき、限界代替率逓減の法則 ($f'(k) > 0, f''(k) < 0$) が満たされることを示せ。

(iii) 労働者賃金・資本レンタル価格比 ω とすると、最適資本・労働比率 $k = k(\omega)$ は

$$k(\omega) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\omega$$

となることを示せ。

(iv) 上式を用いて、代替の弾力性 σ が 1 に等しくなることを示せ。

(v) 各生産要素の相対的シェア、$s_K = KF_K/F, s_L = LF_L/F$ が $\alpha, 1-\alpha$ となることを示せ。

上級ミクロ経済学（前半）
第三週宿題(利潤最大化問題)

京都大学経済研究所　森知也

平成 19 年 3 月 19 日

問題 B.9 (利潤最大化問題) 生産関数が凹関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$（ただし x_i は第 i 生産要素の投入量）である完全競争企業の利潤最大化問題について考察する。生産財の価格を 1 、第 i 生産要素の価格を w_i とすると、総要素費用は $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i$ である。この企業には生産要素の購入にあたり、予算制約があり、総要素費用の上限が $\gamma > 0$ で与えられるとする。このとき以下の問に答えよ。

(i) 企業の利潤最大化問題を記述せよ。

$(ii)$$\gamma$ が十分大きい値ならば、利潤を最大化する生産計画において総要素費用は γ より小さいことを示せ。

(iii) 企業の利潤は γ に関して非減少、つまり、予算制約が緩めば利潤は増加する傾向がある、ことを示せ。

問題 B.10 (双対性) 完全市場において利潤最大化するある企業の振る舞いについて考察する。生産財の市場価格が上昇を受けて、ある企業は熟練労働者の雇用を増やし、未熟練労働者の雇用を減らしたとしよう。さらに、それを受けて、この企業の未熟練労働者は労働組合を通じて賃上げに成功したとしよう。このとき、以下の問に答えよ。未熟練労働者の賃上げに対して、(i) 未熟練労働者の雇用、および、(ii) 企業の産出量ははどのように変化するか答えよ。

問題 B.11 (完全競争均衡) 二つの地域 A, B があり、これらのいずれかに立地して財 i を生産する完全競争的企業があるとする。いずれの地域に立地しても財 i を 1 単位生産するのに一定量の生産要素投入が必要であるとし、単位産出量当りの生産費用は一定で両地域で等しいとする。財 i は地域間で輸送可能であるが、地域間の輸送には「氷解型」費用がかかるとする。つまり、x 単位の財を地域 A から B（あるいは B から A）へ輸送すれば、その一部分 x/T 単位のみ地域 B（あるいは A）に到着するとする（ただし、$T > 1$）。このとき、以下の問に答えよ。

(i) 企業が地域 A に立地した場合、また地域 B に立地した場合のそれぞれについて、財 i の実現可能な単位産出量当たりの地域間配分計画 (x_{iA}, x_{iB}) を図示せよ（x_{ir} は地域 $r = A, B$ への供給量シェア）。さらに、企業が任意に立地地域を選べる場合、財 i の実現可能な地域間配分計画の集合は非凸となることを図示せよ。

(ii) 企業が地域 A に立地しており、地域 A から両地域に財 i を供給する場合 $(x_{iA}, x_{iB} > 0)$ に成立する必要のある地域 A, B 間の財 i の価格比 p_{iA}/p_{iB} の値を求めよ。

(iii) 企業が立地地域を選べるとき、(ii) の状況は完全競争均衡ではあり得ないこと、つまり、地域間の交易が起こるような利潤最大化立地を支持する市場価格は存在しないことを示せ。

上級ミクロ経済学（前半）
第四週宿題：消費者の理論

京都大学経済研究所　森知也

平成 19 年 3 月 12 日

問題 C.1 (スルツキー方程式) マーシャルの需要関数が価格変化の効果の対称性 $(i.e., \partial x_j(p,I)/\partial p_i = \partial x_i(p,I)/\partial p_j)$ を持つことの必要十分条件は、全ての財に対する需要の所得弾力性が 1 でることを示せ。

問題 C.2 (需要関数の性質) $x(p,I)$ を微分可能なマーシャルの需要関数として以下の問に答えよ。

(i) $\sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\partial x_i}{\partial I} = 1$ であることを示せ。

(ii) 消費者の財 i に対する支出が、財 i の価格の上昇に伴って減少することの必要十分条件は、財 i に関する需要の価格弾力性が 1 より大きいこと、つまり、

$$-\frac{\partial x_i(p,I)}{\partial p_i} \Big/ \frac{x_i}{p_i} > 1$$

であることを示せ。

(iii) $\frac{\partial x_i(p,I)}{\partial I} \geq 0$ であるとき、財 i は (p,I) において正常であるという。(さらに、財が任意の $p \gg 0, I > 0$ に関して正常であるとき、この財は正常財であるという。) $\frac{\partial x_i(p,I)}{\partial p_i} > 0$ となるとき、財 i はギッフェン財と呼ばれるが、ギッフェン財は正常ではあり得ないことを示せ。さらに、下級財が必ずしもギッフェン財ではないことを図示せよ。

問題 C.3 (加法的分離可能効用関数) 効用関数が $u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \cdots + u_K(x_K)$ により与えられ、すべての $k = 1, \ldots, K$ について $u_k' > 0, u_k'' < 0$ が成り立つとする。ただし $x_k (\geq 0)$ は消費財 k の消費量である。このとき、すべての消費財 $1, \ldots, K$ は正常財であることを示せ。

問題 C.4 (ホモセティック効用関数) ホモセティックな効用関数は $Gorman$ 型（$v(p,I) = V(p)I$）であることを示せ。

上級ミクロ経済学(前半)
第五週宿題（リカードモデル)

京都大学経済研究所　森知也

平成 19 年 3 月 19 日

問題 D.1 $p_1^*/p_2^* \in (\alpha, \beta)$ のとき、図D.6・D.9、およびホモセティック効用関数の性質を用いて、国 A による財 1 の輸出が国 B による財 1 の輸入に等しいことを示せ。

問題 D.2 仮定D.1 の下で以下の問に答えよ。

(i) 均衡において $w_A > w_B$ となるのはどの様なときか。

(ii) 交易条件 p_1/p_2 の変化に対する w_A/w_B の変化について解説せよ。

問題 D.3 比較優位がない場合 $(i.e., \alpha = \beta)$ の均衡における貿易パターンを示せ。

上級ミクロ経済学（前半）
第六週宿題：ヘクシャー＝オーリン・モデル

京都大学経済研究所　森知也

平成 19 年 3 月 19 日

問題 E.1 (生産均衡) 仮定 *E.1*〜*7* の下で、費用最小化問題 (*E.3*) より各財 $i = 1, 2$ の単位生産費用

$$c_i(r, w) = ra_{K_i}(w, r) + wa_{L_i}(w, r)$$

が得られる。このとき以下の問に答えよ。

(i) 不完全特化が起こるとき、各国の資本・労働比率 K/L は (国を示すインデックスは省く)

$$\frac{K}{L} = \lambda_1 \frac{a_{K1}(w, r)}{a_{L1}(w, r)} + \lambda_2 \frac{a_{K2}(w, r)}{a_{L2}(w, r)}$$

と表され (ただし、$\lambda_i = L_i/L, i = 1, 2$)、仮定 *E.9* の下では

$$\frac{a_{K2}(w, r)}{a_{L2}(w, r)} < \frac{K}{L} < \frac{a_{K1}(w, r)}{a_{L1}(w, r)}$$

となること確認せよ。

(ii) 仮定 *E.9* の下での等費用曲線 $c_i(r, w) = p_i$ を要素価格 (r, w) 平面上に図示し、等費用曲線の傾きと (最適) 投入係数 a_{Ki}/a_{Li} との関連に留意して、均衡において実現可能な要素価格ベクトル、および、それらに整合する特化パターンを解説せよ。

問題 E.2 (ヘクシャー＝オーリン定理) (i) 仮定 *E.1*〜*7* の下で、国Aの資本賦存量が相対的に大きく：

$$\frac{K_A}{L_A} > \frac{K_B}{L_B}$$

任意の価格 $p \equiv (p_1, p_2) \gg 0$ の下で財 1 がより資本集約的であるとき (仮定 *E.9*)、自由貿易下で要素需要が均等化する場合 (仮定 *E.8* の下で) の、各国 $\ell = A, B$ における財 1・2 の産出量比率 $x^P_{1\ell}/x^P_{2\ell}$ を比較せよ。

(ii) 各国 $\ell = A, B$ における財 1・2 の消費量比率 $x^C_{1\ell}/x^C_{2\ell}$ を比較せよ。

(iii) 上の結果を用いて、各国は相対的に豊富な生産要素を集約的に用いる財を輸出することを示せ。

問題 E.3 (ストルパー＝サミュエルソン定理) 労働者は労働賃金のみを所得とし、資本家は資本レンタルのみを所得とするとする。いま、資本集約財 1 の価格 p_1 が上昇し、労働集約財 2 の価格 p_2 が一定であるとき、財 $i = 1, 2$ で測った労働者の実質所得 w/P_i は、いずれの財に関しても下落し、資本家の実質所得 r/P_i は、いずれの財に関しても上昇することを示せ。