補論：離散フーリエ変換

目的：集積の空間パターンの周期性の検出・特徴付け

単純化条件：立地空間：円環 (1 次元・端点なし)　$\mathbf{X}$

立地主体：連続体

立地分布：$f(t),\ t \in \mathbf{X}$

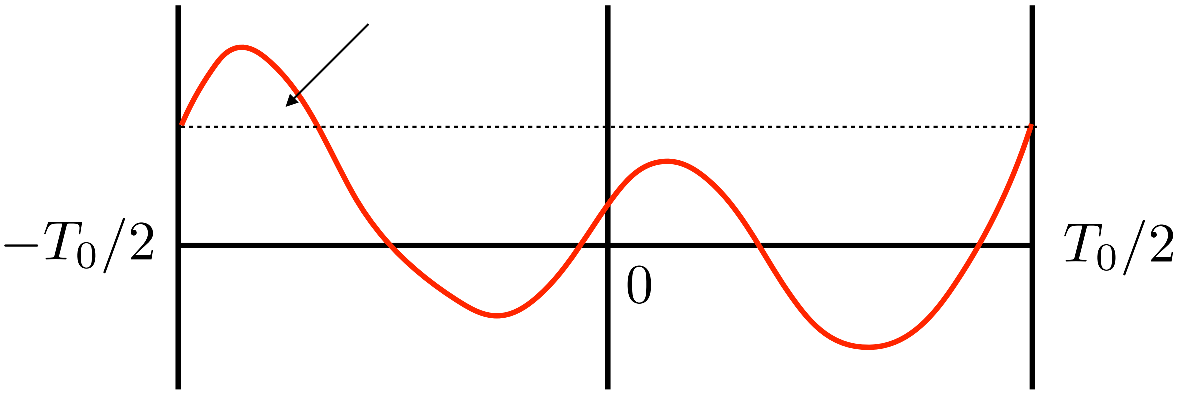
（以下、空間領域は慣例に従って "時間" 領域として表す。）

ステップ１：フーリエ級数

“時間”領域の“信号”を様々な周波数の三角関数の和で表現

i.e., 様々な周波数の波動成分に分解

波動 $f(t)$：周期的, 周期T_0



フーリエ級数展開：

$$f(t) = \underbrace{a_0}_{\text{定数(周波数ゼロの成分)}} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right]}_{\text{周波数} = k \text{ の成分}} \qquad (1)$$

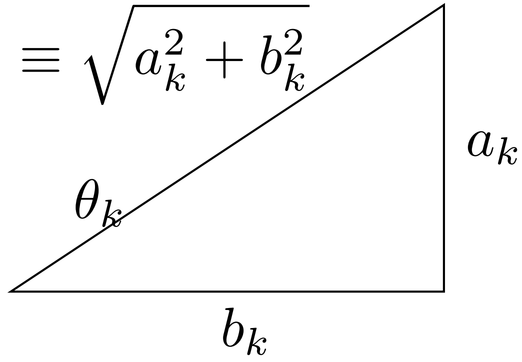
$t = T_0 \rightarrow 2\pi \times k$（時間$T_0$内で$k$周繰り返し）

※ 周期T_0 ⇒ 周波数 k は整数

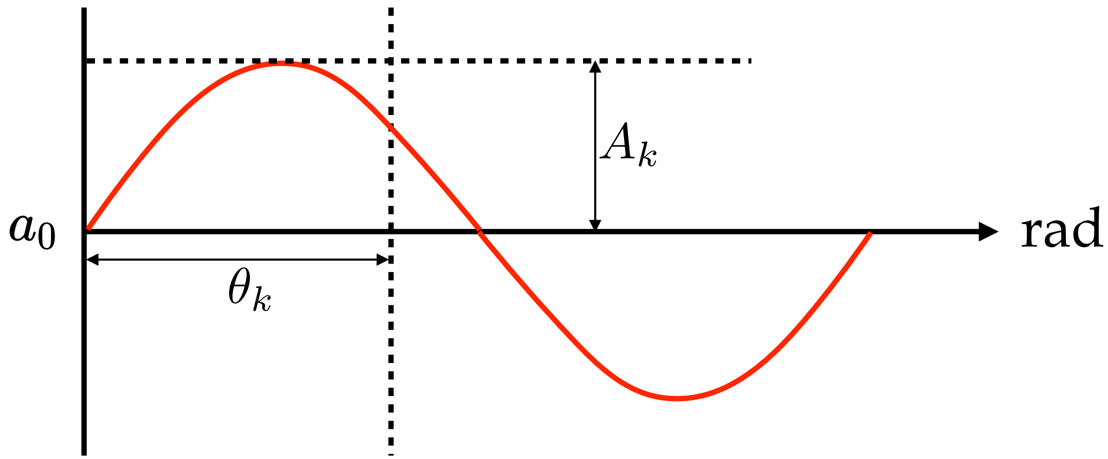
各波動成分の振幅と波動全体の振幅

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\frac{2\pi k}{T_0}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T_0}t\right] \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\left[\frac{a_k}{A_k}\cos\frac{2\pi k}{T_0}t + \frac{b_k}{A_k}\sin\frac{2\pi k}{T_0}t\right] \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sin\theta_k \cos\frac{2\pi k}{T_0}t + \cos\theta_k \sin\frac{2\pi k}{T_0}t\right] \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0}t + \theta_k\right) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$$A_k \equiv \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$



$$\tan\theta_k = \frac{a_k}{b_k}$$



フーリエ係数の導出

$$
\begin{aligned}
\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)dt &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left\{ a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos \frac{2\pi k}{T_0} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T_0} t \right] \right\} dt \\
&= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a_0 dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\underbrace{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} a_k \cos \left(\frac{2\pi k}{T_0} t \right) dt}_{=0} + \underbrace{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} b_k \sin \left(\frac{2\pi k}{T_0} t \right) dt}_{=0} \right] \\
&= T_0 a_0
\end{aligned}
$$

$$
\therefore a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)dt \qquad (3)
$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\cos\left(\frac{2\pi m}{T_0}t\right)dt = a_0\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\cos\left(\frac{2\pi m}{T_0}t\right)dt$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \underbrace{\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\cos\left(\frac{2\pi n}{T_0}t\right)\cos\left(\frac{2\pi m}{T_0}t\right)dt}_{=\frac{T_0}{2}\delta_{m,n}}\right.$$

$$\left.+\, b_n \underbrace{\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\sin\left(\frac{2\pi n}{T_0}t\right)\cos\left(\frac{2\pi m}{T_0}t\right)dt}_{=0}\right]$$

※ 三角関数の直交性

※ 三角関数の直交性
＋三角関数の1次化

n=mの場合：

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

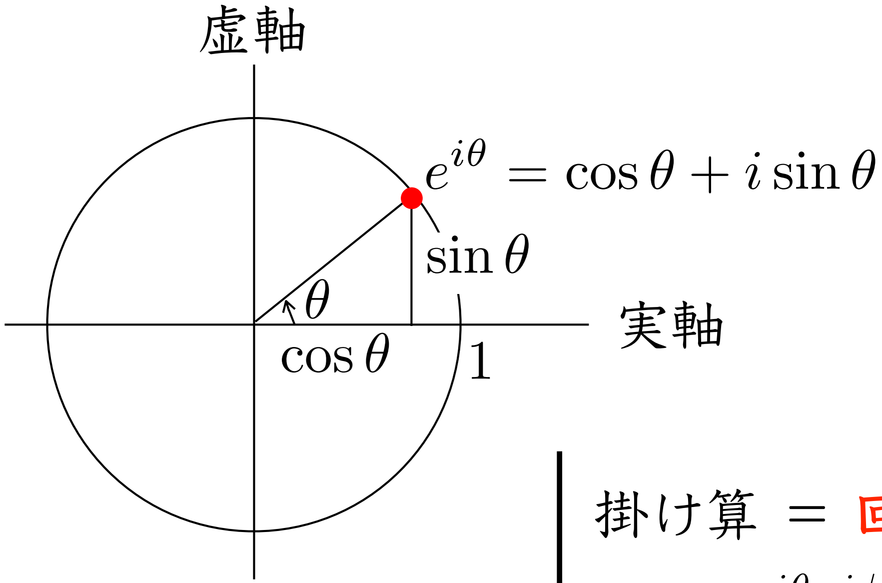
$$\left(\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{if } m = n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}\right)$$

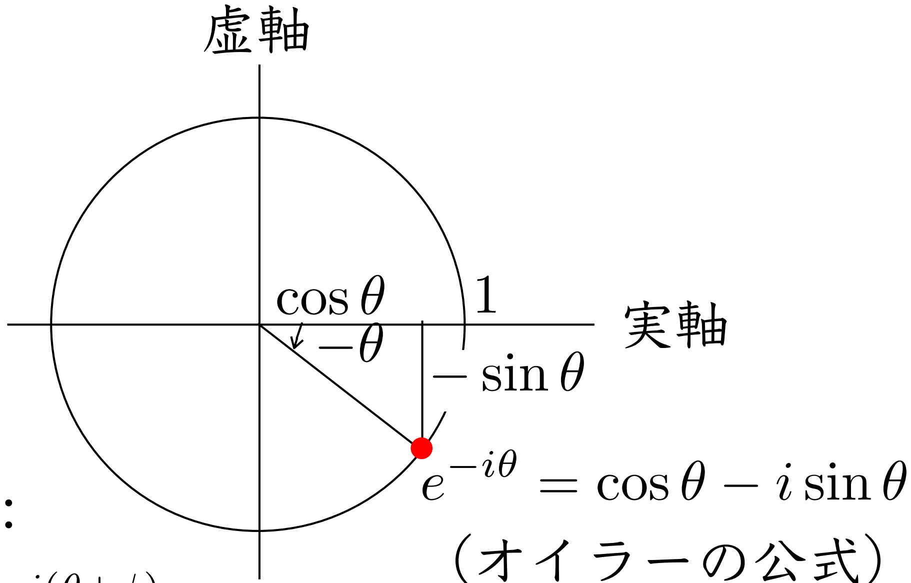
$$\therefore a_k = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\cos\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right)dt \qquad (4)$$

同様に

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\sin\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right)dt \qquad (5)$$

ステップ 2：複素フーリエ級数

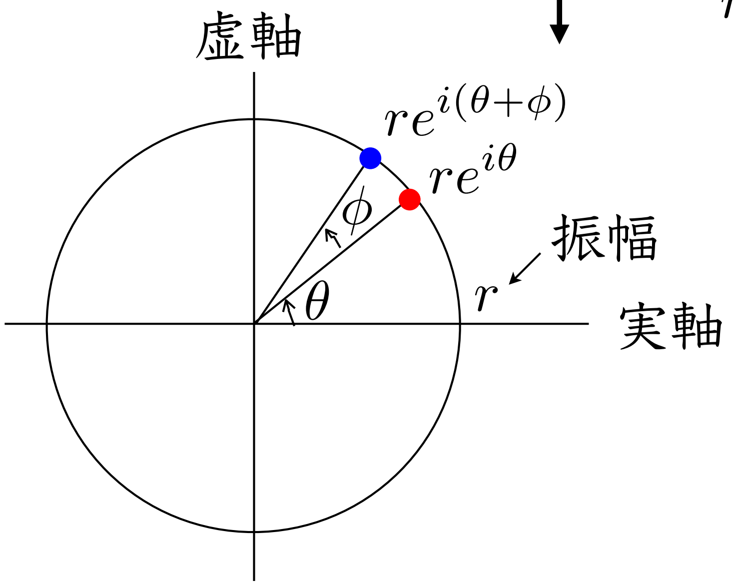




（オイラーの公式）

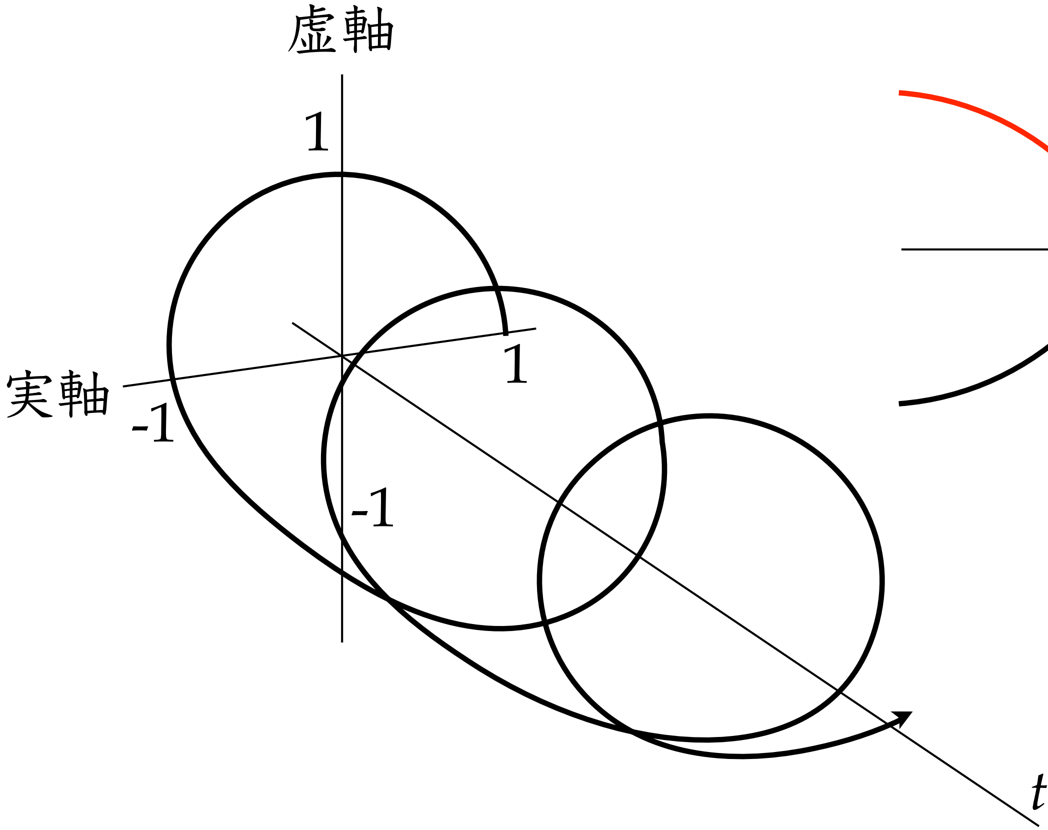
掛け算 ＝ 回転：

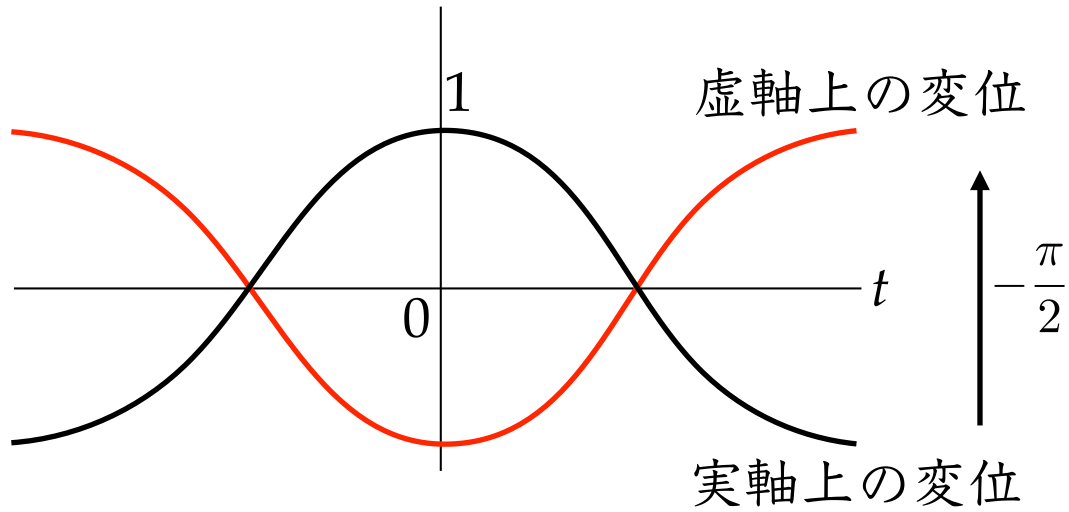
$$re^{i\theta}e^{i\phi} = re^{\underbrace{i(\theta+\phi)}_{\text{偏角の足し算}}}$$



$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i}$$


虚軸
1
実軸
-1
1
-1
t


1
虚軸上の変位
0
t
$-\frac{\pi}{2}$
実軸上の変位

周期・周波数・角周波数

周期$= T$： $f(t+T) = f(t) \ \forall t \in \mathbf{X}$ （距離）

周波数： $1/T$ （Hz, 周/時間）

角周波数： $\Omega = \dfrac{2\pi}{T}$ （rad/時間）

基本周期≡波動成分の最長周期：T_0

基本周波数： $1/T_0$

基本角周波数： $\Omega_0 \equiv \dfrac{2\pi}{T_0}$

$\longrightarrow$ 基本周波数を用いたフーリエ級数展開：

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\Omega_0 k t\right) + b_k \sin\left(\Omega_0 k t\right) \right] \tag{6}$$

フーリエ級数展開の複素数表現

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(\Omega_0 kt) + b_k \sin(\Omega_0 kt)\right] \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \frac{e^{i\Omega_0 kt} + e^{-i\Omega_0 kt}}{2} + b_k \frac{e^{i\Omega_0 kt} - e^{i\Omega_0 kt}}{2}\right] \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{i\Omega_0 kt} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-i\Omega_0 kt}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\longrightarrow f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{i\Omega_0 kt} \quad (7) \qquad \text{但し} \quad \begin{cases} F_k \equiv \frac{a_k - ib_k}{2} \\ F_{-k} \equiv \frac{a_k + ib_k}{2} \end{cases}
$$

※ 周波数 $k\ (\neq 0)$ の波動成分の振幅：

$$
|F_k| = |F_{-k}| = \sqrt{F_k F_{-k}} = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2}
$$

i.e., $A_k \equiv |F_k| + |F_{-k}| = 2|F_k|$

$\longrightarrow$ $e^{i\Omega_0 kt}, e^{-i\Omega_0 kt}$ 合わせて周波数 k 成分

フーリエ係数の計算

$$m = n: \quad \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{i\Omega_0 mt} e^{-i\Omega_0 nt} dt = T_0$$

$$\begin{aligned}
m \neq n: \quad \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{i\Omega_0 mt} e^{-i\Omega_0 nt} dt &= \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{i\Omega_0 (m-n)t} dt \\
&= \frac{1}{i\Omega_0 (m-n)} \left[e^{i\Omega_0 (m-n)t} \right]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \\
&= \frac{1}{i\Omega_0 (m-n)} \left\{ e^{i\pi(m-n)} - e^{-i\pi(m-n)} \right\} \\
&= \frac{1}{i\Omega_0 (m-n)} \{(-1)^{m-n} - (-1)^{m-n}\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{i\Omega_0 mt} e^{-i\Omega_0 nt} dt = T_0 \delta_{m,n}$$

$$\longrightarrow \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-i\Omega_0 kt} dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\Omega_0 nt} \right) e^{-i\Omega_0 kt} dt$$

$$= F_k T_0$$

$$\therefore F_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-i\Omega_0 kt} dt \qquad (8)$$

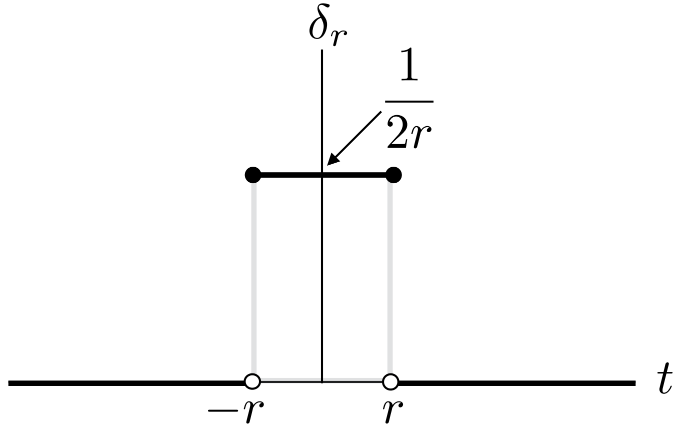
周期的なインパルスのフーリエ変換

デルタ関数

矩形関数：

$$\delta_r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2r}, & t \in [-r, r] \\ 0, & t \in (-\infty, -r) \cup (r, \infty) \end{cases}$$

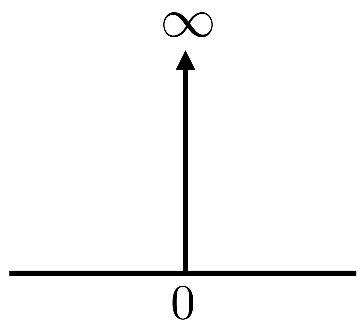
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_r(t) dt = 1$$



デルタ関数（単位インパルス）：

$$\delta(t) \equiv \lim_{r \to 0} \delta_r(t) \longrightarrow \delta(t) = \begin{cases} \infty\,, & t = 0 \\ 0\,, & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

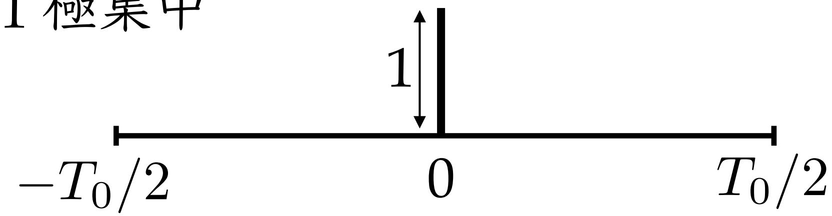


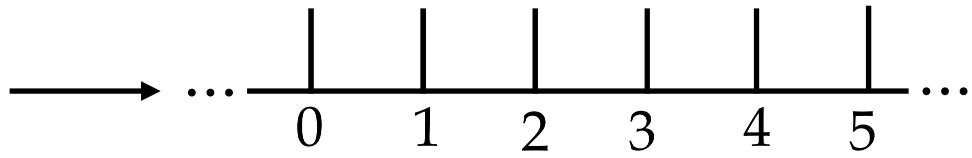
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \qquad (9)}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\lim_{r\to 0}\delta_r(t-a)dt \\
&= \lim_{r\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_r(t-a)dt \\
&= \lim_{r\to 0}\int_{a-r}^{a+r} \frac{f(t)}{2r}dt \\
&= \lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}[F(x)]_{a-r}^{a+r} \qquad \left(F(x)\equiv\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{r\to 0}\frac{F(a+r)-F(a-r)}{r} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{r\to 0}\frac{F(a+r)-F(a)+F(a)-F(a-r)}{r} \\
&= \frac{1}{2}\left[\lim_{r\to 0}\frac{F(a+r)-F(a)}{r}+\lim_{r\to 0}\frac{F(a-r)-F(a)}{-r}\right] \\
&= \frac{f(a)+f(a)}{2} = f(a)
\end{aligned}$$

周期的なインパルスのフーリエ係数

1 極集中

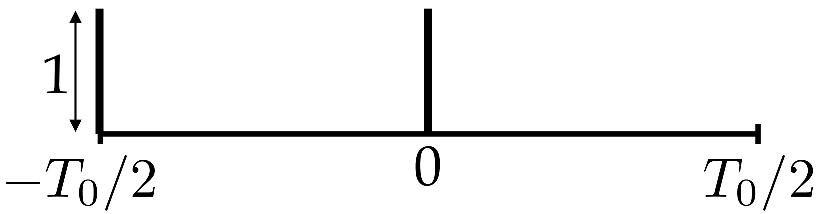


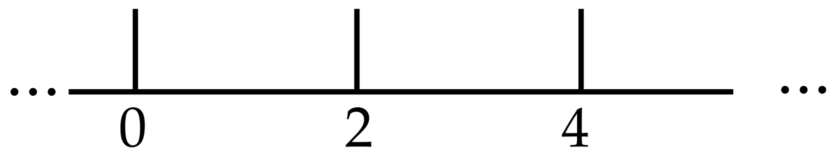


あらゆる周波数の重ね合わせ

$$F_k = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} 1 \cdot \delta(t) e^{-i\Omega_0 kt} dt = e^0 = 1 \quad \forall k = 0, 1, \ldots$$

2極集中





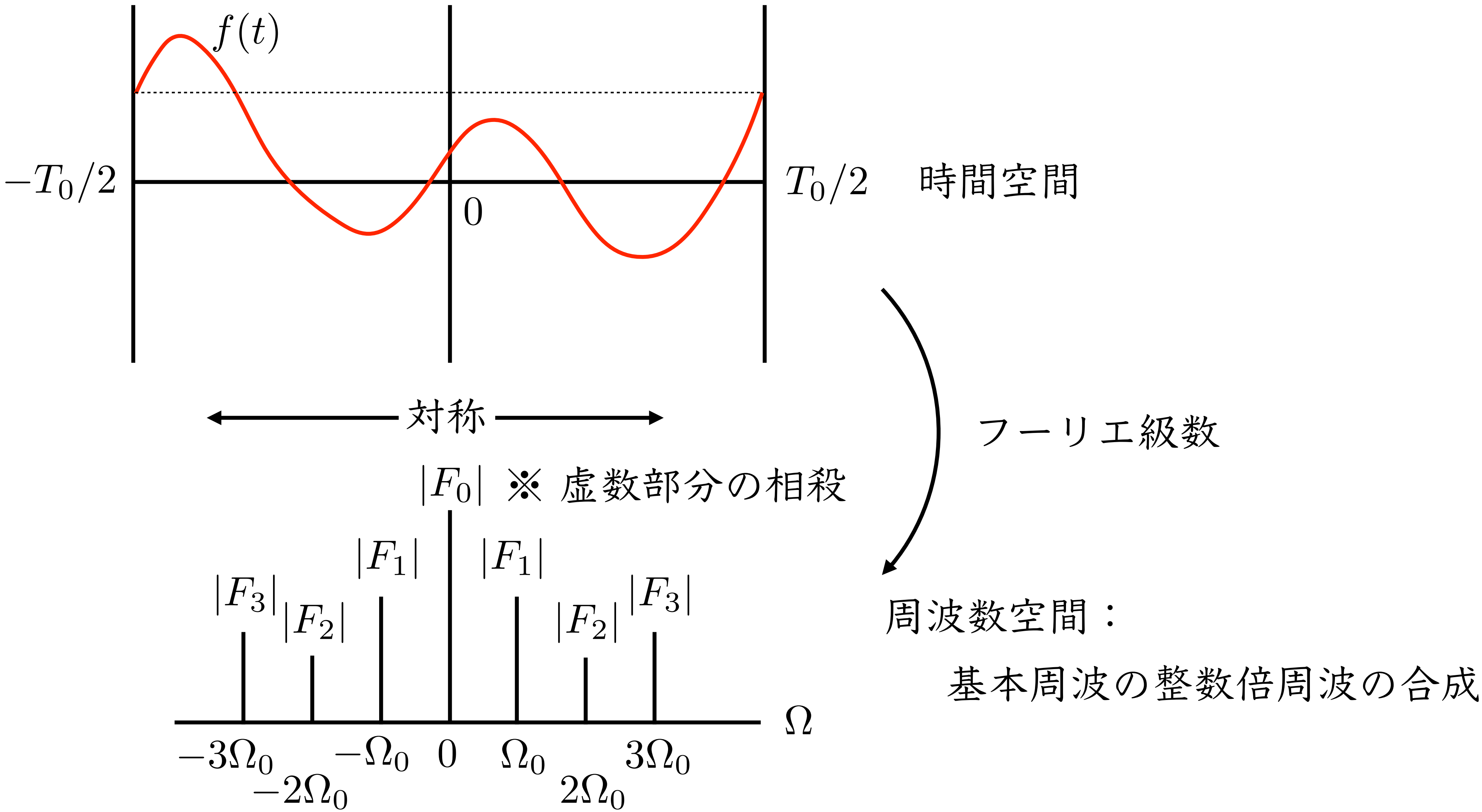
全ての偶数周波数の重ね合わせ

$$\Omega_0 k \frac{T_0}{2} = \frac{2\pi}{T_0} k \frac{T_0}{2} = k\pi$$

$$F_k = 1 \cdot \underbrace{e^0}_{\text{周期}0} + 1 \cdot \underbrace{e^{-\overbrace{ik\pi}}}_{\text{周期}T_0/2} = 1 + \cos k\pi - i \underbrace{\sin k\pi}_{=0} = 1 + (-1)^k$$

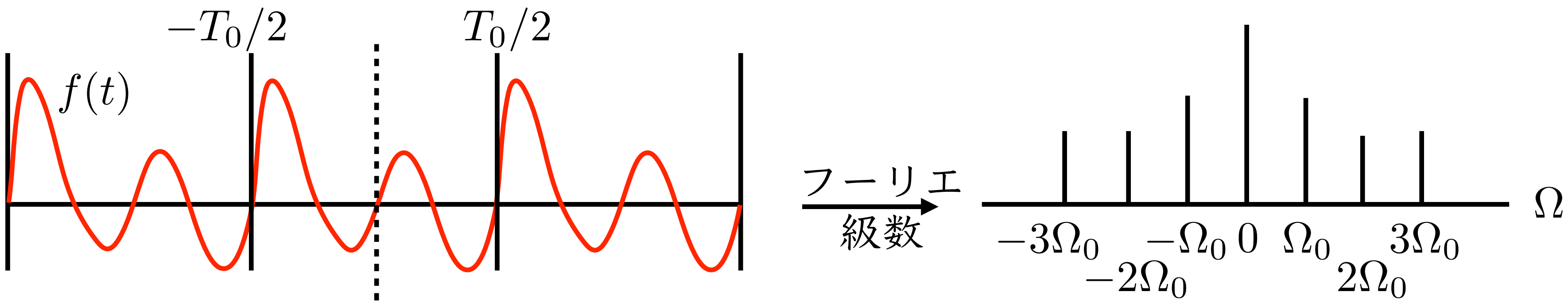
フーリエ級数：周期的な時間信号 → 離散周波数成分に分解

$f(t)$：周期的, 周期T_0



ステップ 3: フーリエ変換

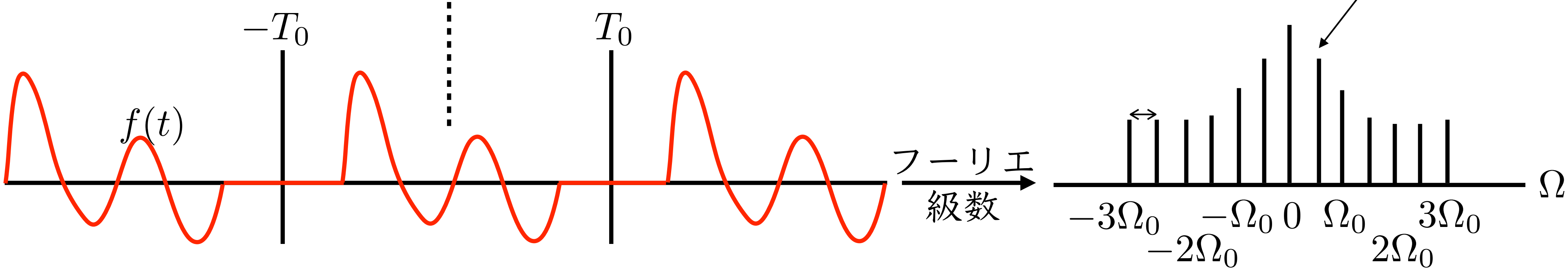
連続非周期的な空間信号 → 連続非周期的周波数成分に変換



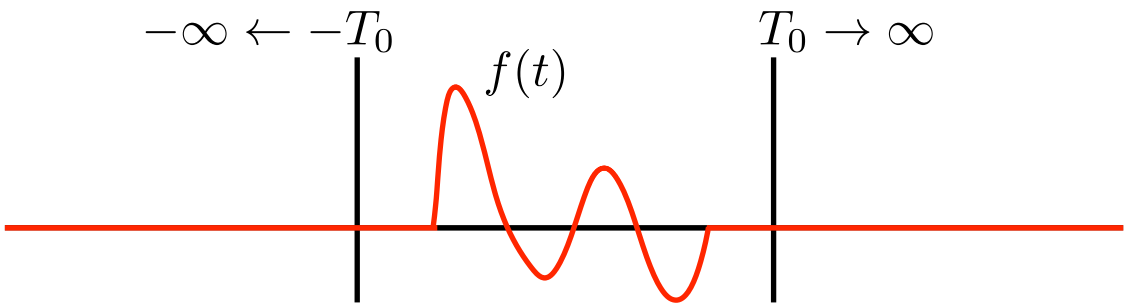
振動期間内の波形は変えずに周期だけ2倍化：

周期：$T_0 \to 2T_0$ ⟶ 基本周波数：$\dfrac{2\pi}{2T_0} = \dfrac{\Omega_0}{2}$

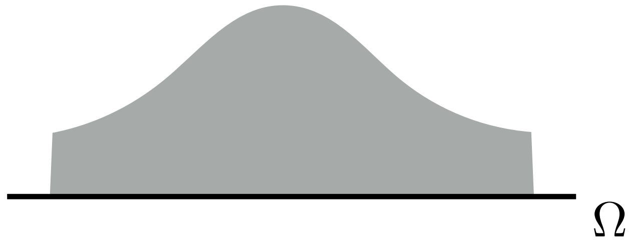
周波数スペクトル密度：2倍

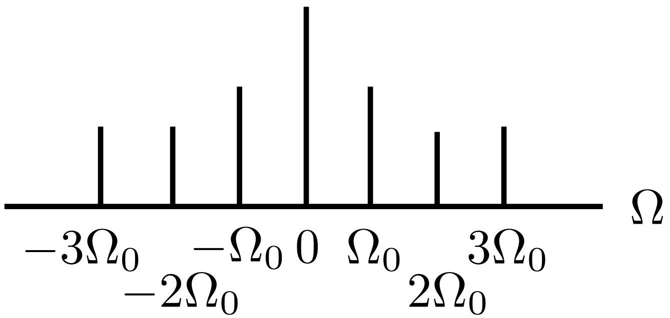


離散→連続



フーリエ変換



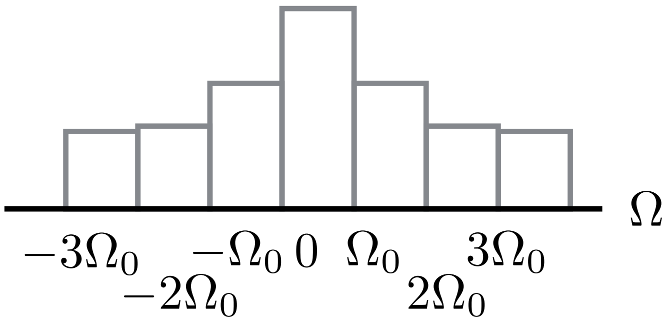


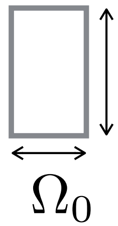
線分長から面積
への書き換え

$$\boldsymbol{F_k e^{i\Omega_0 kt}}$$

項和→積分へ

線分→短冊へ





$$\frac{F_k e^{i\Omega_0 kt}}{\Omega_0}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{i\Omega_0 kt}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_0 \frac{2\pi F_k e^{i\Omega_0 kt}}{\Omega_0}$$

慣例

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_0 \underbrace{F(\Omega[k])}_{\equiv \frac{2\pi F_k}{\Omega_0}} e^{i \overbrace{\Omega[k]}^{\equiv \Omega_0 k} t}$$

周波数の関数として定義

※ []は整数の関数を意味する

$$\boldsymbol{f(t) = 0 \;\; \forall t \in (-\infty, T_0) \cup (T_0, \infty)}$$

$$F_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-i\Omega_0 k t} dt \qquad (10)$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-i\Omega[k] t} dt$$

$$F(\Omega[k]) = 2\pi F_k / \Omega_0$$

$$F(\Omega[k]) = \frac{2\pi}{T_0\Omega_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-i\Omega_0 k t} dt$$

$$= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-i\Omega[k] t} dt \quad (\because \Omega_0 \equiv 2\pi/T_0)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_0 F(\Omega[k]) e^{i\Omega[k]t}$$

$\Omega_0 \equiv \Delta\Omega$ ※ $\Omega_0 \equiv 1/T_0$ より、$T_0 \nearrow \infty \Rightarrow \Omega_0 \searrow 0$

（周期の無限化）

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\Omega[k]) e^{i\Omega[k]t} \Delta\Omega$$

$T_0 \rightarrow \infty$

$\Omega[k] \equiv \Omega$ ：連続化

フーリエ級数 → フーリエ逆変換：(7)

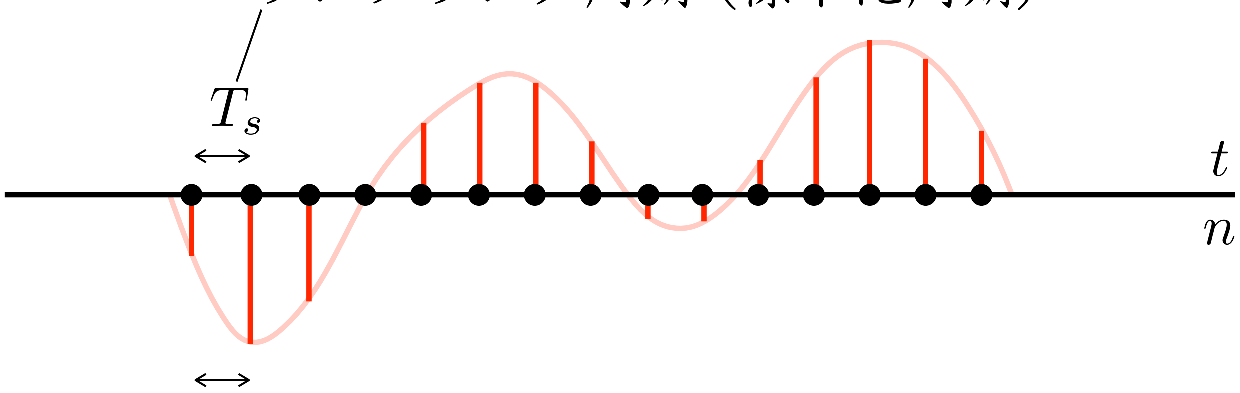
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \quad (11)$$

フーリエ係数計算 → フーリエ変換：(10)

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (12)$$

ステップ 4：離散フーリエ変換

離散時間信号



正規化周期：1

正規化各周波数： $\omega \equiv \underbrace{\Omega}_{\text{角周波数}} T_s$ （サンプル周期毎に進む角度）

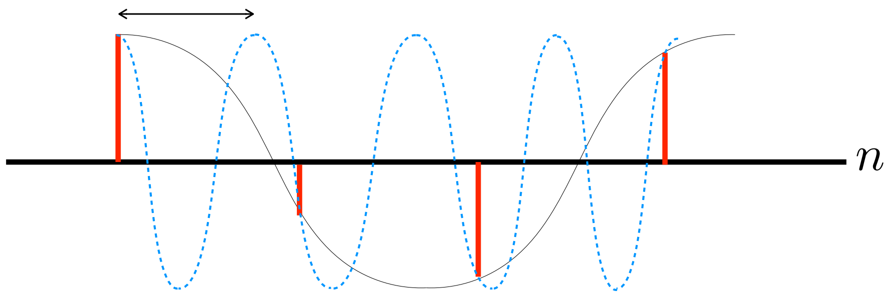
離散時間信号の性質

$$f[n|\omega] = \cos\omega n$$

$$f[n|\omega = \omega_1] = \cos\omega_1 n$$

$$f[n|\omega = \underbrace{\omega_1 + 2\pi k}_{\text{i.e., 1サンプル周期ごとに振動数が } k \text{ 増える}}] = \cos(\omega_1 + 2\pi k)n = \cos\omega_1 n \equiv f[n|\omega = \omega_1]$$

$k = 1$の場合：1振動



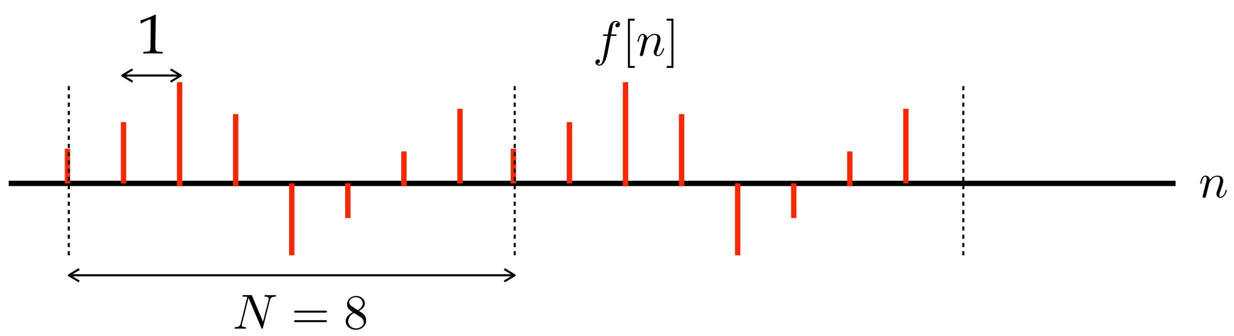
※1. 離散空間 → 角周波数は0〜2πの繰り返し

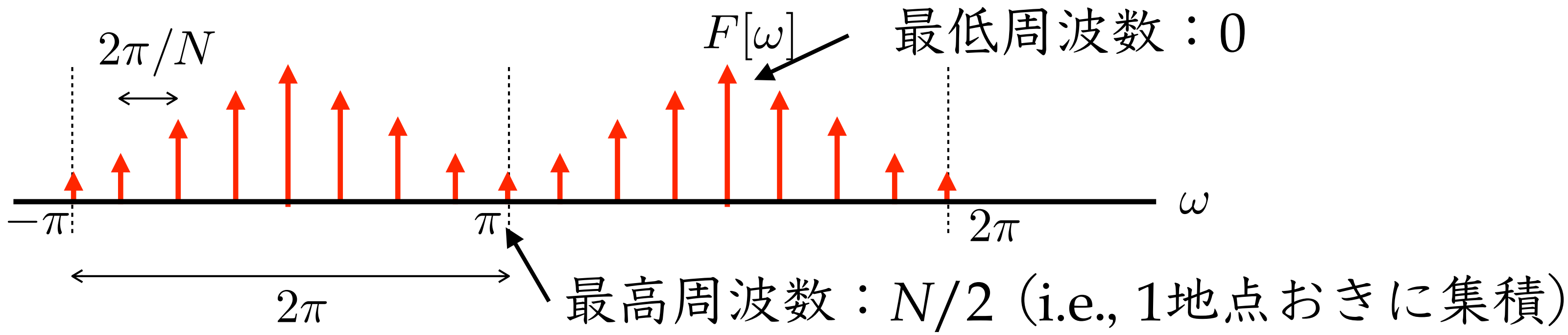
⇒ 周波数スペクトルは$-\infty$から∞ではなく0〜2πの範囲で求めれば良い

※ 時間領域：離散・周期的 ↔ 周波数領域：離散・周期的

・時間領域で周期的↔周波数領域で離散(ステップ3)
・周波数領域で周期的↔時間領域で離散（※1）

離散時間領域での周期：N　　　　基本角周波数：$2\pi/N$





$\omega,\ \omega+2\pi k$　：判別できない→周波数領域での周期は2π

離散時間フーリエ変換：

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-i\omega n} \qquad ：$$

$$\omega = \frac{2\pi k}{N}$$

周期成分数$=N$

$\Rightarrow$ 2πの範囲の周波数スペクトルの繰り返し

$$F[k] \equiv \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \quad (13)$$

$$\frac{|F[k]|}{|F[k']|} = \frac{|F(2\pi k/N)|}{|F(2\pi k'/N)|}$$

フーリエ逆変換：

$$
\begin{aligned}
f[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)e^{i\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} cF[k]\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)e^{i\omega n}d\omega \\
&= \frac{c}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]e^{i\frac{2\pi k}{N}n} \quad \text{：}2\pi\text{の範囲には}N\text{個のインパルスしかない} \\
&= \frac{c}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1} f[m]e^{-i\frac{2\pi}{N}km}\right]e^{i\frac{2\pi}{N}kn} \\
&= \frac{c}{2\pi}\sum_{m=0}^{N-1} f[m]\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}k(n-m)} \\
&= \frac{c}{2\pi}\sum_{m=0}^{N-1} f[m]N\delta_{m,n} \\
&= \frac{cN}{2\pi}f[n] \quad \xrightarrow{\quad c \equiv \frac{2\pi}{N} \quad} \quad \therefore f[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]e^{i\frac{2\pi}{N}kn} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

周波数スペクトルの性質

$$
\begin{aligned}
F_{N-k} &= \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-k)n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \left[e^{i\frac{2\pi}{N}(N-k)} \right]^{-n} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} f[k] \left[e^{-i\frac{2\pi}{N}k} \right]^{-n} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} f[k] e^{i\frac{2\pi}{N}kn} \\
&\equiv \overline{F[k]} \quad \text{i.e.,}\ F[N-k], F[k] \text{ : 共役関係}
\end{aligned} \tag{15}
$$

離散フーリエ変換の行列表示

$$\zeta_N \equiv e^{i\frac{2\pi}{N}}$$
$$\overline{\zeta}_N \equiv \zeta_N^{-1}$$

$$\longrightarrow \quad F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \overline{\zeta}^{kn}$$

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \overline{\zeta}_N & \overline{\zeta}_N^{2} & \cdots & \overline{\zeta}_N^{N-1} \\ 1 & \overline{\zeta}_N^{2} & \overline{\zeta}_N^{4} & \cdots & \overline{\zeta}_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \overline{\zeta}_N^{N-1} & \overline{\zeta}_N^{2(N-1)} & \cdots & \overline{\zeta}_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_N \equiv (F_0, \ldots, F_{N-1})'$$
$$\mathbf{f}_N \equiv (f_0, \ldots, f_{N-1})'$$
$$\mathbf{M}_N \equiv (\zeta_N^{kn})_{k,n=0,1,\ldots,N-1}$$

$$\mathbf{F}_N = \overline{\mathbf{M}}_N \mathbf{f}_N \qquad (16)$$

離散フーリエ変換の行列の性質

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\zeta^{kn} = \begin{cases} 1\,, & n=0 \\ 0\,, & n\geq 1 \end{cases}}$$

$$n=0 \Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\zeta^{kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 1 = 1$$

$$n\geq 1\ :\quad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\zeta^{kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} z^k \quad (z\equiv\zeta^n)$$

$$z^N = (\zeta^n)^N = (\zeta^N)^n = (e^{2\pi i})^n = 1 \Rightarrow 1 - z^N = 0$$

$$1 - z^N = (1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} z^k = 0$$

離散フーリエ逆変換の行列表示

$$f_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k \zeta_N^{kn}$$

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta_N & \zeta_N^2 & \cdots & \zeta_N^{N-1} \\ 1 & \zeta_N^2 & \zeta_N^4 & \cdots & \zeta_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta_N^{N-1} & \zeta_N^{2(N-1)} & \cdots & \zeta_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{bmatrix}$$

DFT行列

$$\mathbf{f}_N = \mathbf{M}_N \mathbf{F}_N \qquad (17)$$

$\mathbf{M}_N \overline{\mathbf{M}}_N = \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{M}_N$ はユニタリ行列

空間割引行列の性質

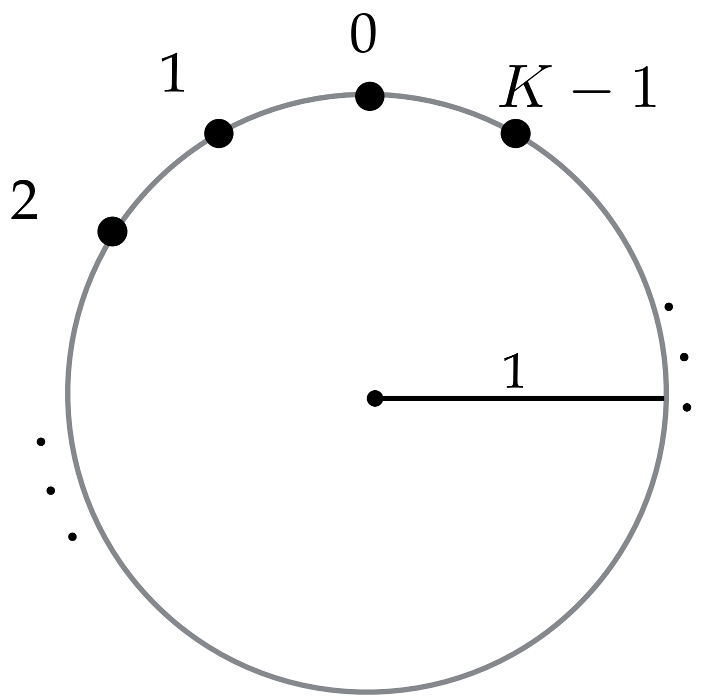
― 離散円周立地空間の場合 ―

地域 ij 間距離： $t(i,j) = \dfrac{2\pi}{K} \min\left(|i-j|, K-|i-j|\right)$

地域 ij 間輸送における残存率：

$$d_{ij} = \exp[-(\sigma-1)\tau t(i,j)]$$

輸送費パラメタ



空間割引因数： $r = \exp\left[-(\sigma-1)\tau\dfrac{2\pi}{K}\right]$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & r & \cdots & r^2 & r \\ r & 1 & \cdots & r & r^2 \\ r^2 & r & \cdots & r^4 & r^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r & r^2 & \cdots & r & 1 \end{bmatrix}$$

循環性

$\boldsymbol{D}$の固有値：　$\boldsymbol{f} \equiv [f_0, f_1, \ldots, f_{K-1}]^T$

$$\longrightarrow \underbrace{\boldsymbol{Z}^* \boldsymbol{D} \boldsymbol{Z}} = \mathrm{diag}[\boldsymbol{f}] \qquad (18)$$

$\begin{cases} \boldsymbol{Z}：\boldsymbol{D}\text{と同次元の離散フーリエ変換行列} \\ \boldsymbol{Z}^*：\boldsymbol{Z}\text{の複素共役行列} \end{cases}$

$$\boldsymbol{d}_0 \equiv [1, r, r^2, \ldots, r^M, r^{M-1}, \ldots, r^2, r]^T, \quad (M \equiv K/2)$$

（空間割引行列Dの1行目）

$$\boxed{\boldsymbol{f} = \boldsymbol{Z} \boldsymbol{d}_0} \qquad (19)$$

$$
\boldsymbol{Z} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 \\ \boldsymbol{z}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_{K-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{K-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(K-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{K-1} & \omega^{2(K-1)} & \cdots & \omega^{(K-1)^2} \end{bmatrix}
$$

$$
\omega \equiv \exp\left(\frac{2\pi}{K} i\right)
$$

補題 4.1 (Akamatsu et al., JEDC2012)

$$
f_m = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\left(\frac{m}{M}\pi\right) + r^2}\left[1 - (-1)^m r^M\right] \quad , \quad m = 0, 1, \ldots, M
$$

$$
f_m = f_{K-m}
$$

証明：

$$
f_m = [1, \omega^m \omega^{2m}, \ldots, \omega^M, \omega^{-(M-1)m}, \ldots, \omega^{-m}] \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ \vdots \\ r^M \\ r^{M-1} \\ \vdots \\ r \end{bmatrix}
$$

$$
= 1 + \omega^{Mm} + \sum_{k=1}^{M-1} \left(\omega^{km} + \omega^{-km} \right) r^k
$$

$$
\because e^{ikx} + e^{-ikx} = 2\cos kx
$$

$$
= 1 + \underbrace{(-1)^m r^M}_{\omega^{Mm} = e^{i\pi m}} + 2\left[r\cos x + r^2 \cos 2x + \cdots + r^{M-1} \cos(M-1)x \right]
$$

$$
(x \equiv 2\pi m / K)
$$

$$
= 2\mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{M-1} \left(r e^{xi} \right)^k \right] = 2\mathrm{Re}\left[\frac{r e^{xi} - r^M \overbrace{e^{Mxi}}^{e^{\pi m i} = (-1)^m}}{1 - r e^{xi}} \right]
$$

$$
= 2\mathrm{Re}\left[\frac{r e^{xi} - (-1)^m r^M}{1 - r e^{xi}} \right] = 2\mathrm{Re}\left[\frac{r(\cos mx + i \sin mx) - (-1)^m r^M}{1 - r(\cos mx + i \sin mx)} \right]
$$

$$= 2\mathrm{Re}\left[\frac{\overbrace{r\cos mx - (-1)^m r^M}^{C} + i\overbrace{(r\sin mx)}^{D}}{\underbrace{1 - r\cos mx}_{A} + i\underbrace{(-r\sin mx)}_{B}}\right]$$

$$= 2\frac{AC + BD}{A^2 + B^2}$$

$-$

$$A^2 + B^2 = 1 + r^2 + 2r\cos mx$$

$$AC + BD = (1 - r\cos mx)[r\cos mx - (-1)^m r^M]$$

$$- r^2 \sin^2 mx$$

$$= 1 - r^2 + (r\cos mx - 1)[1 + (-1)^m r^M]$$

$+$

$$f_m = 1 + (-1)^m r^M + 2\frac{1 - r^2 (r\cos mx - 1)[1 + (-1)^m r^M]}{1 + r^2 - 2r\cos mx}$$

$$= [1 + (-1)^m r^M]\left[1 + 2\frac{r\cos mx - 1}{1 + r^2 - 2r\cos mx}\right] + 2\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos mx}$$

$$= \frac{(1 - r^2)[1 - (-1)^m r^M]}{1 + r^2 - 2r\cos mx} = \frac{(1 - r^2)[1 - (-1)^m r^M]}{1 + r^2 - 2r\cos \underbrace{\frac{2\pi m}{K}}_{m\pi/M}}$$

Q.E.D.

正規化空間割引行列

正規化空間割引行列：$\boldsymbol{D}/\underbrace{d}$

$$\equiv f_0 = \sum_{k=0}^{M-1} d_{0,k} = 1 + r^M + 2\sum_{k=1}^{M-1} r^k$$

$$= 1 + r^M + 2\frac{r - r^M}{1-r}$$

$$= \frac{1+r}{1-r}(1 - r^M)$$

$$\overline{f}_0 \equiv 1$$

$$\overline{f}_m = \frac{(1+r)(1-r)[1-(-1)^m r^M]}{1 + r^2 - 2r\cos(m\pi/M)}\frac{1-r}{1+r}\frac{1}{1-r^M}$$

$$= \underbrace{\frac{(1-r)^2}{1+r^2-2r\cos(m\pi/M)}}_{\equiv \Psi_m(r)}\underbrace{\frac{1-(-1)^m r^M}{1-r^M}}_{\equiv \epsilon_M(r)}$$

参考文献

鏡慎吾「やる夫で学ぶディジタル信号処理」ver. 2014.11.03.
東北大学大学院情報科学研究科（2014）

佐藤敏明「図解雑学フーリエ変換」ナツメ社（2013）

Akamatsu, T., Y. Takayama and K. Ikeda. “Spatial discounting, Fourier, and racetrack economy: A recipe for the analysis of spatial agglomeration models.” JEDC 36 : 1729-1759 (2012).