

B.4. 利潤最大化問題

§ B.4.1 利潤最大化問題と利潤関数

短期： $\pi(p, w, \bar{x}_f) \equiv \max_{x_v, y} \sum_{i=1}^m p_i y_i - \left\{ \sum_{i=1}^k w_i x_i + \sum_{i=k+1}^n w_i \bar{x}_i \right\}$ (B.65)

総収入 — total revenue

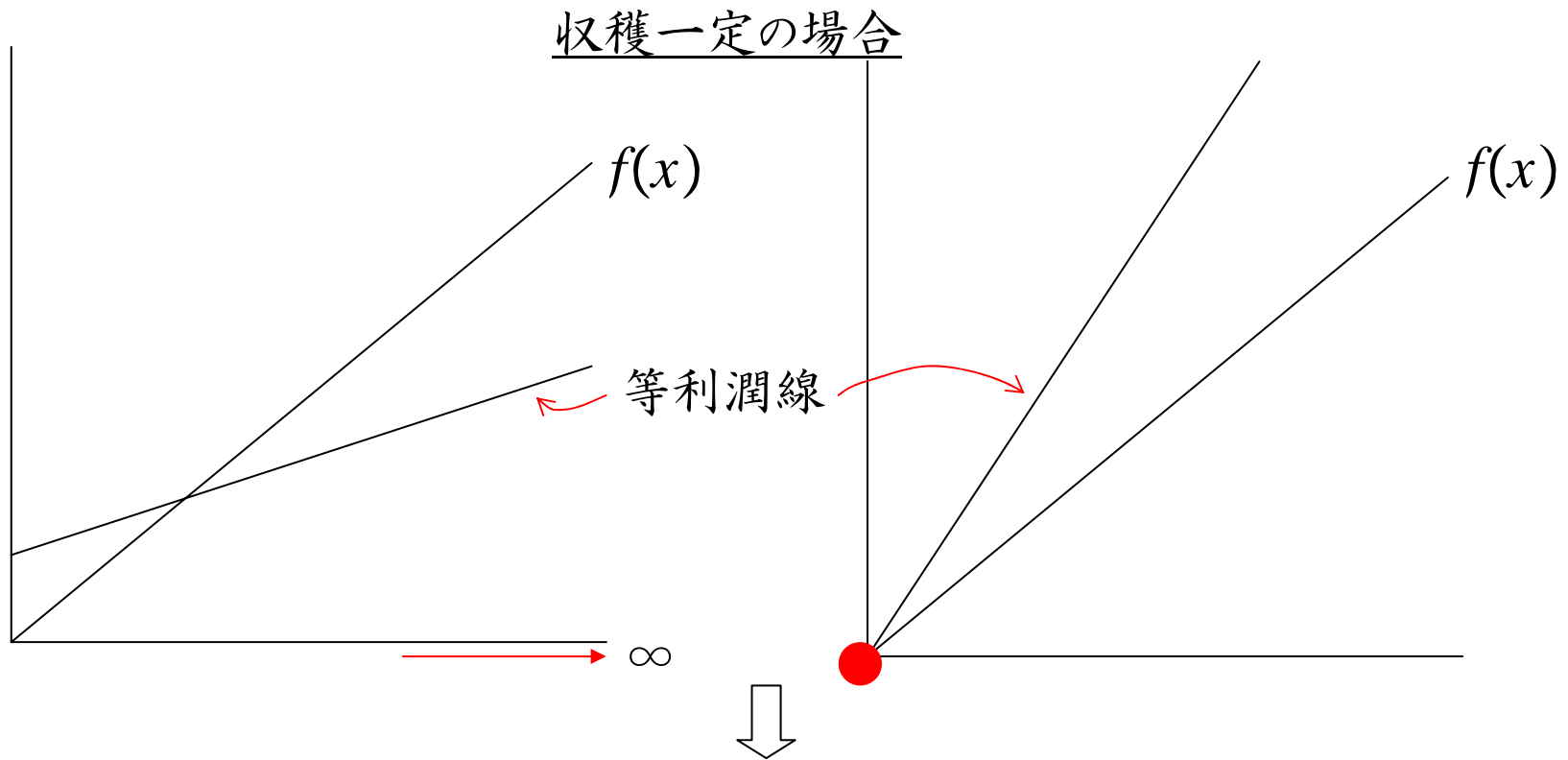
総生産費用 — total production cost

$s. t. \quad F(x_v, y; \bar{x}_f) = 0$

利潤関数

長期： $\pi(p, w) \equiv \max_{x_v, y} \sum_{i=1}^m p_i y_i - \sum_{i=1}^n w_i x_i$ (B.66)

$s. t. \quad F(x, y) = 0$



収穫一定 + 最適において有限正な産出量 \Rightarrow 利潤ゼロ

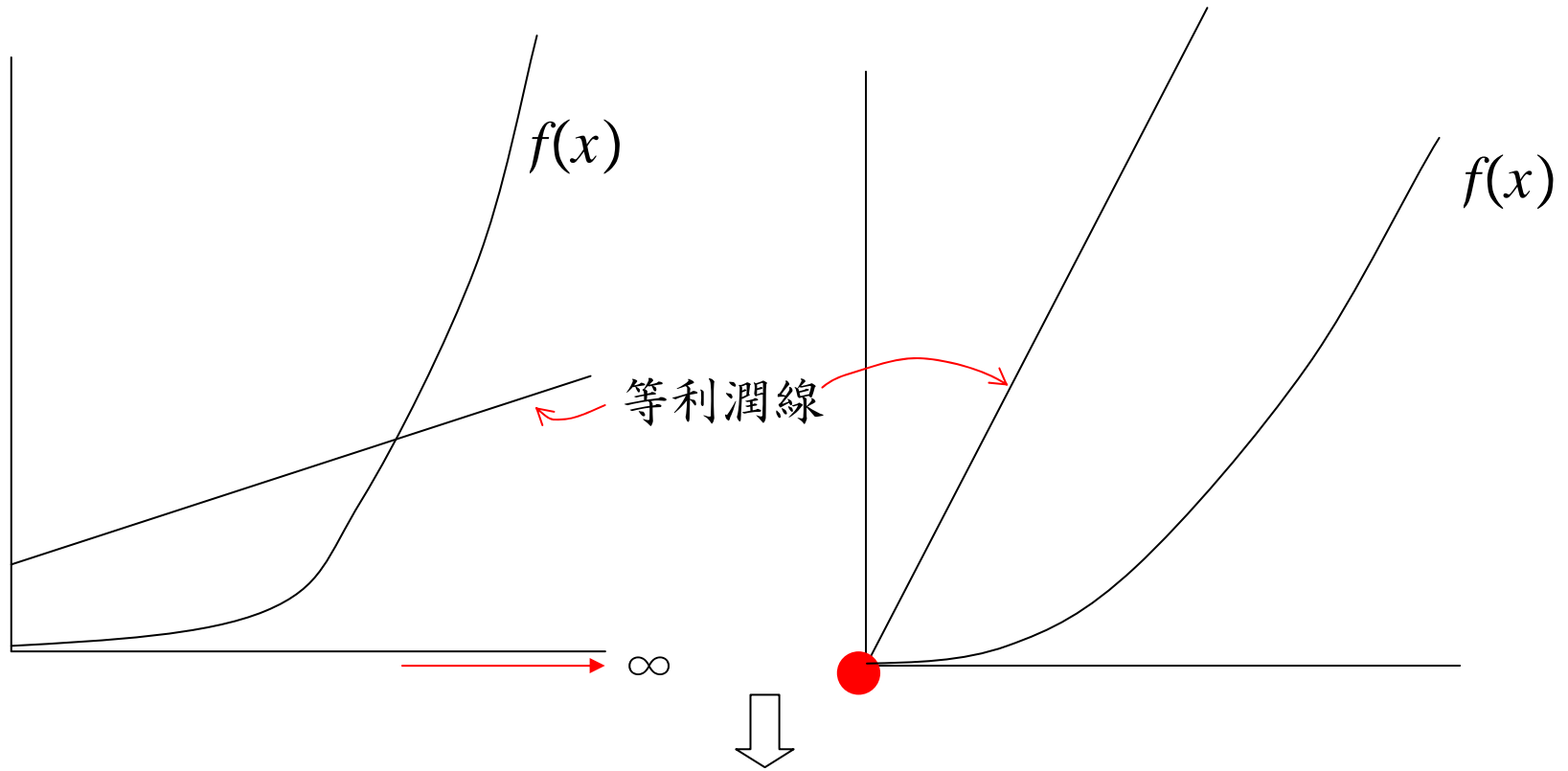
$$y(p) = \begin{cases} \infty & \text{if } p > c \\ [0, \infty) & \text{if } p = c \\ 0 & \text{if } p < c \end{cases}$$

限界費用

収穫一定が成立する場合

供給関数はあまり意味を持たない

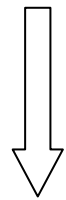
収穫逓増の場合



産出量・利潤はゼロまたは ∞

§ B.4.2 供給関数

$$\max_y py - C(y; w_v, w_f, \bar{x}_f)$$



最適解は固定費用に依存しない

$$\max_y py - C_v(y; w_v, \bar{x}_f)$$

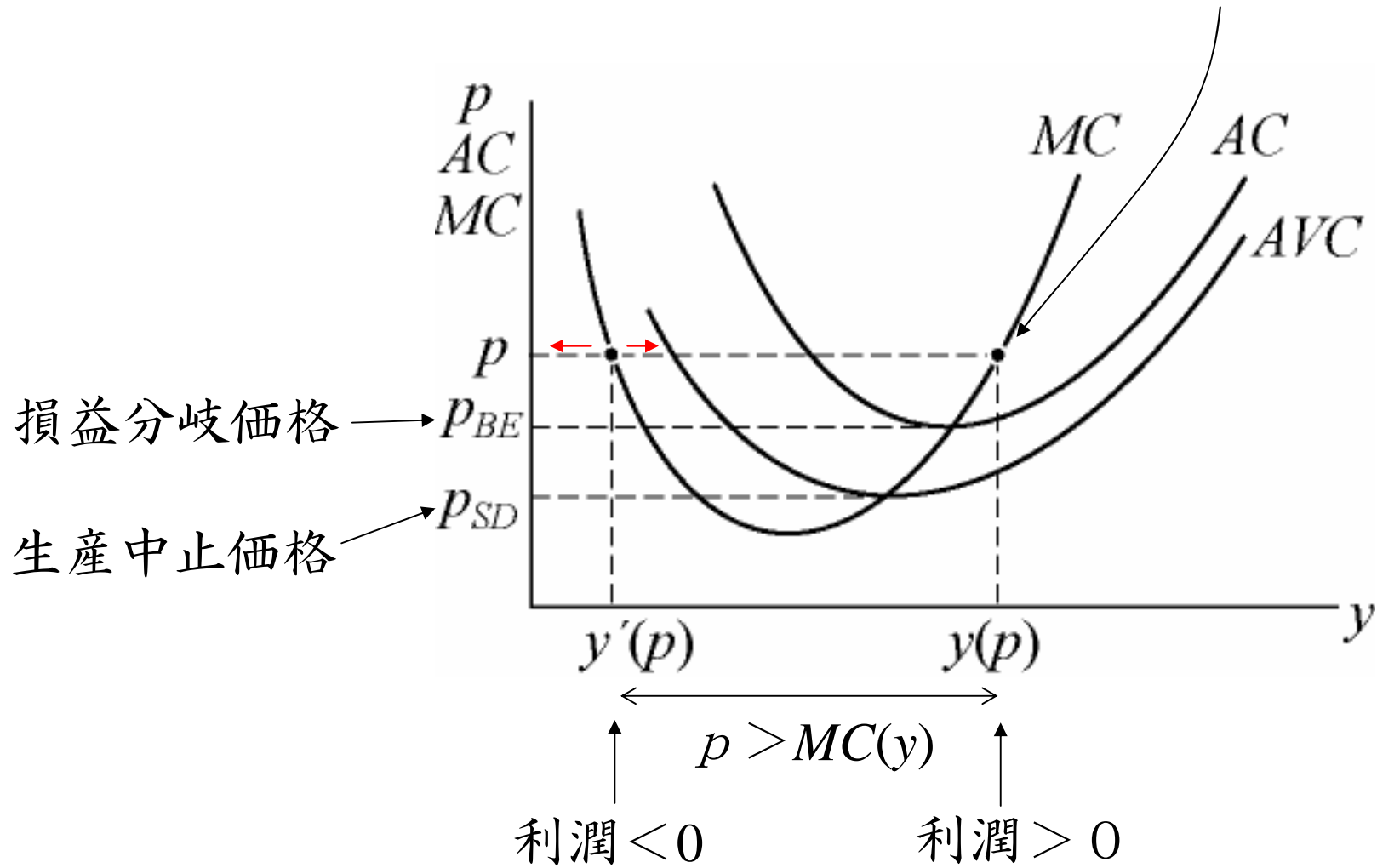
事実B.31 (利潤最大化の1階条件)

$$\text{限界費用} : \frac{\partial}{\partial y} C_v(y; w_v, \bar{x}_f) = p \quad : \text{限界収入}$$

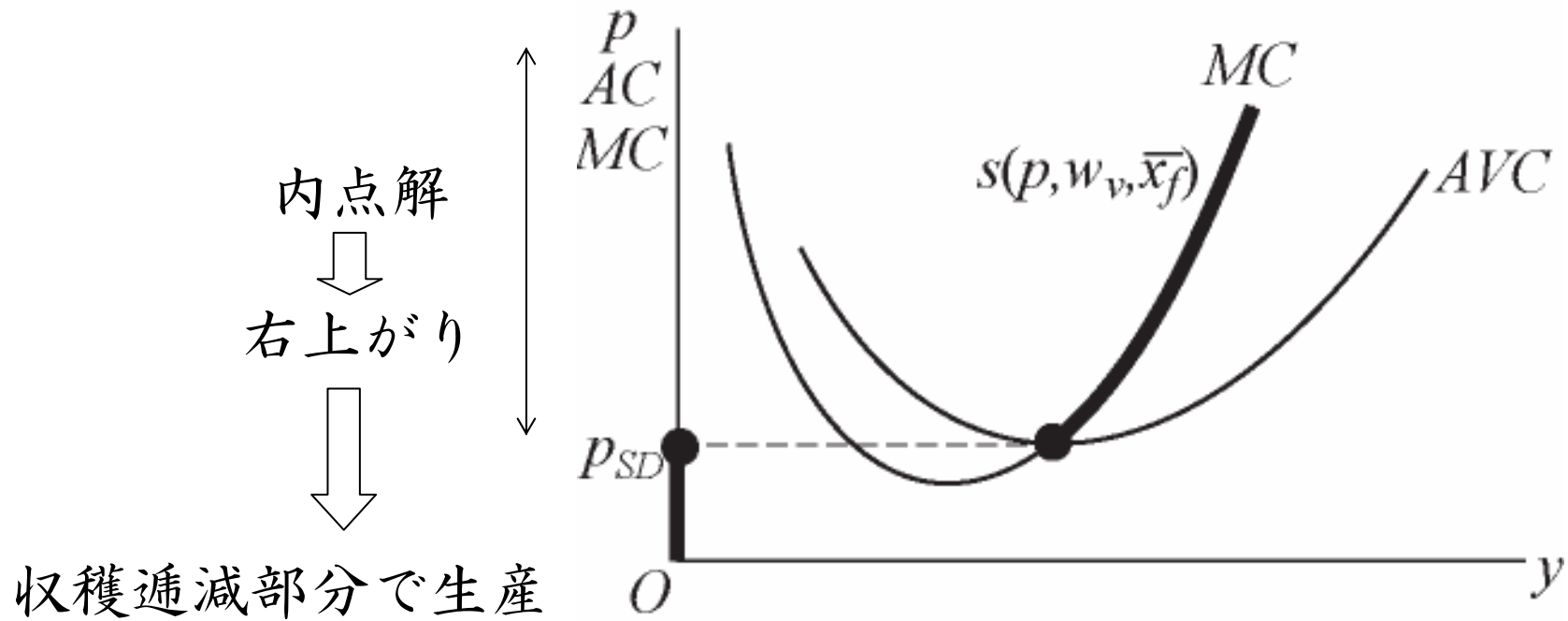
事実B.32 (利潤最大化の2階条件)

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} C_v(y; w_v, \bar{x}_f) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y} MC(y^*; w, \bar{x}_f) > 0 \quad 6$$

2階条件：最適産出量においてMCは増加



定義B.28 (供給関数—supply function)



$$s(p, w_v, \bar{x}_f) = \begin{cases} 0 & \text{if } p < p_{SD} \\ \{0, y(p)\} & \text{if } p = p_{SD} \\ y(p) & \text{if } p > p_{SD} \end{cases} \quad (\text{B.74})$$

定義B.29 ((無制約の)要素需要関数—
(unconstrained) factor demand function)

$$d(p, w_v, w_f, \bar{x}_f) \equiv h(s(p, w_v, \bar{x}_f); w_v, \bar{x}_f)$$

↑
産出量も最適に調整

定義B.30 (利潤関数—profit function)

$$\pi(p, w) \equiv ps(p, w) - C(s(p, w); w)$$

§ B.4.3 利潤関数と要素需要関数の性質

事実B.34 (価格に対する反応)

$$\left. \begin{array}{l} w' \leq w \\ p' \geq p \end{array} \right\} \Rightarrow \pi(p', w') \geq \pi(p, w)$$

証明

$\left. \begin{array}{l} y \\ y' \end{array} \right\}$ を $\left\{ \begin{array}{l} (p, w) \\ (p', w') \end{array} \right\}$ の下での最適解とすると

$$\begin{aligned} \pi(p', w') &= p' \cdot y' - w' \cdot x' \\ &\geq p' \cdot y - w' \cdot x \\ &\geq p \cdot y - w \cdot x \\ &= \pi(p, w) \end{aligned}$$

事実B.35 (価格に関する1次同次性)

$$\pi(tp, tw) = t\pi(p, w) \quad \forall t \geq 0$$

(x, y) を p のでの最適解とすると

$$p \cdot y - w \cdot x \geq p \cdot y' - w \cdot x' \quad \forall (x', y') \in \mathbf{Y}$$

↓ 両辺 t 倍

$$t(p \cdot y - w \cdot x) \geq t(p \cdot y' - w \cdot x') \quad \forall t \geq 0, \forall (x', y') \in \mathbf{Y}$$

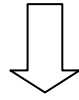
↓

$$\therefore \pi(tp, tw) = t(p \cdot y - w \cdot x) = t\pi(p, w)$$

事実B.36 (価格に関する凸性)

$$0 \leq t \leq 1$$

$$(p'', w'') = t(p, w) + (1 - t)(p', w')$$



$$\pi(p'', w'') \leq t\pi(p, w) + (1 - t)\pi(p', w')$$

証明

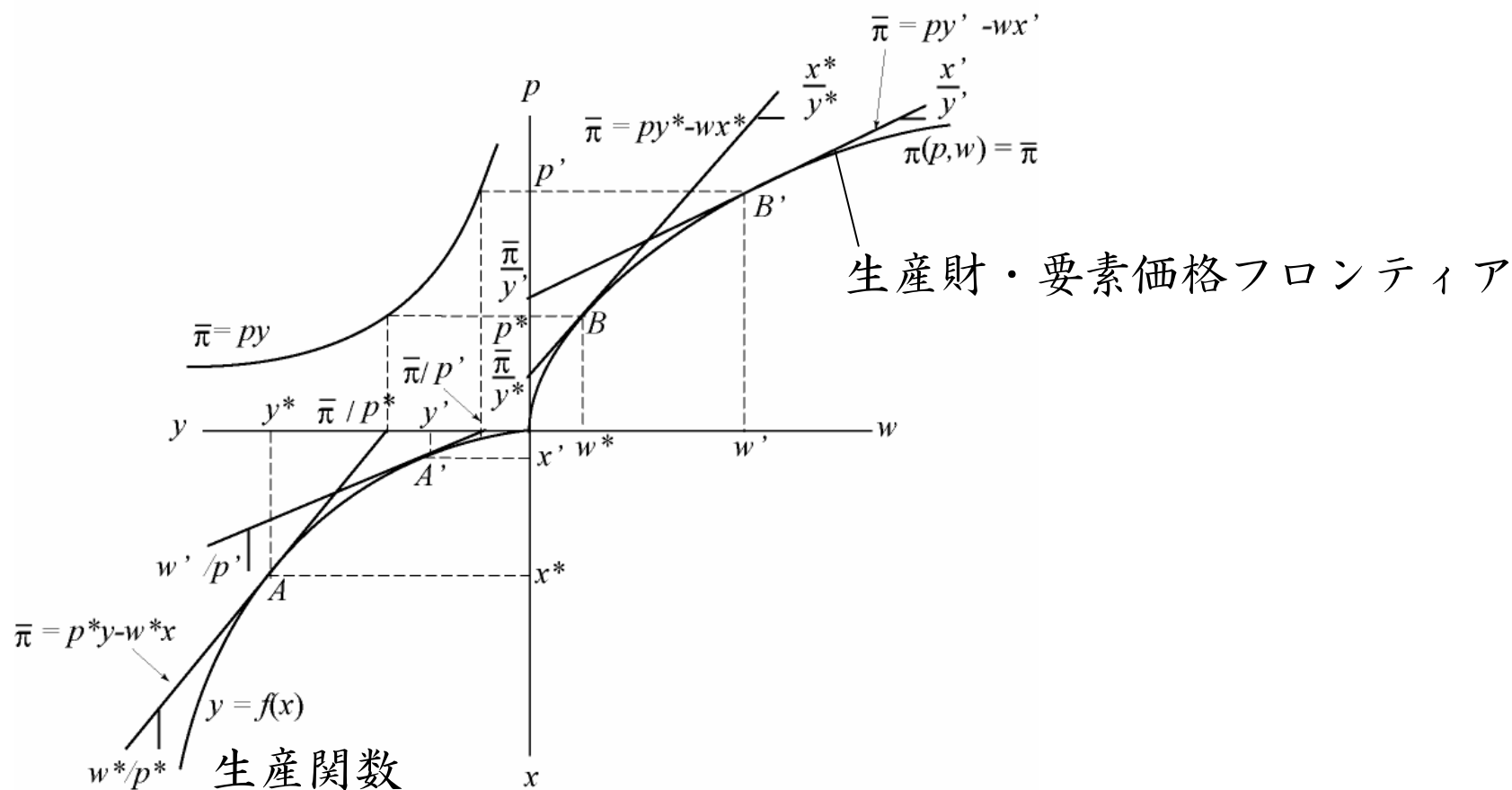
$$\begin{aligned} \pi(p'', w'') &= (tp + (1 - t)p') \cdot y'' - (tw + (1 - t)w') \cdot x'' \\ &= \frac{t(p \cdot y'' - w \cdot x'')}{\leq t\pi(p, w)} + \frac{(1 - t)(p' \cdot y'' - w' \cdot x'')}{\leq (1 - t)\pi(p', w')} \end{aligned}$$

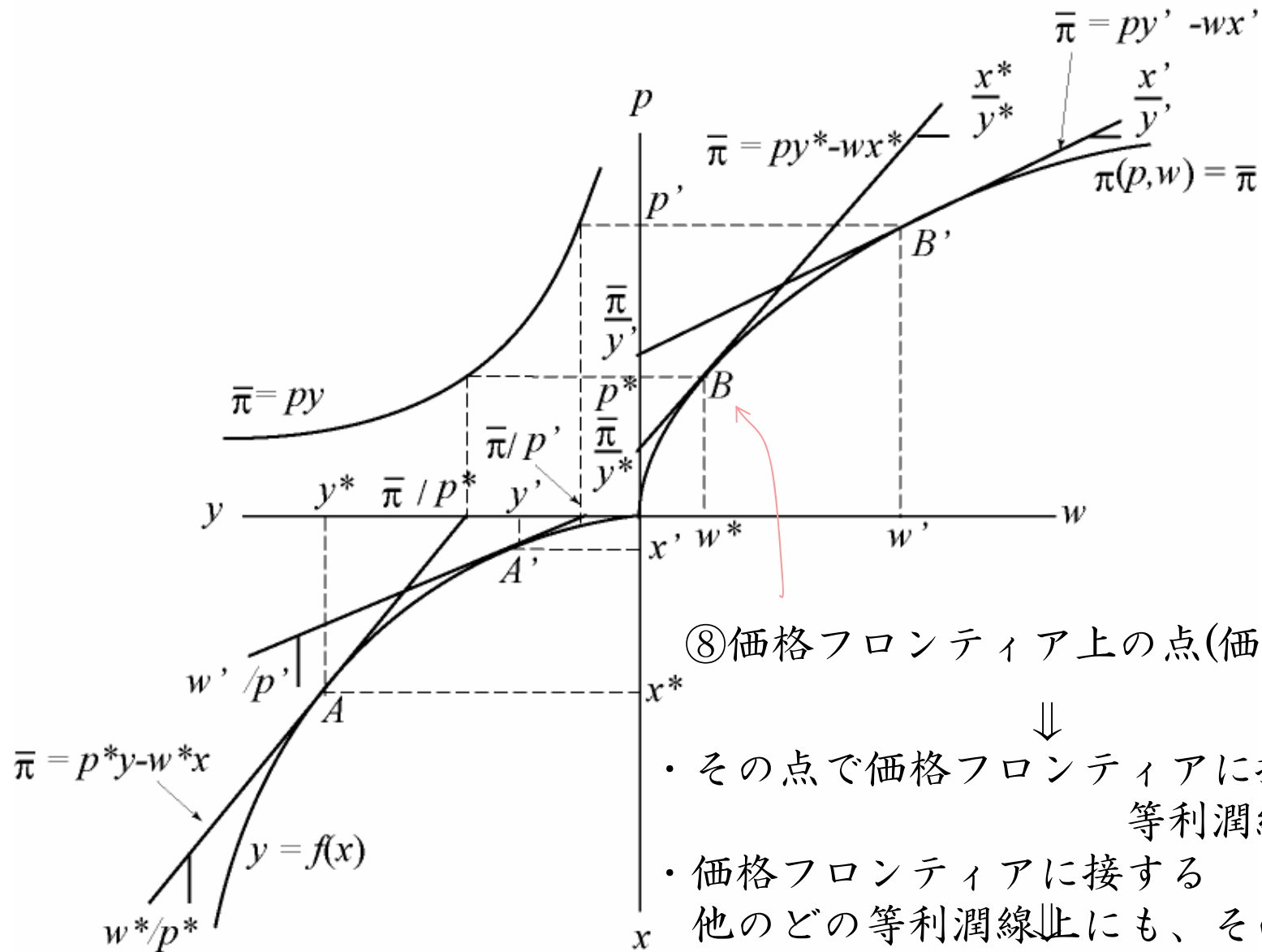
双対性：生産関数と価格フロンティア（1生産財・1要素の場合）

生産財・要素価格フロンティア：

フロンティア上各点におけるフロンティア勾配＝

その点に対応する価格ベクトル下での最適投入・産出比





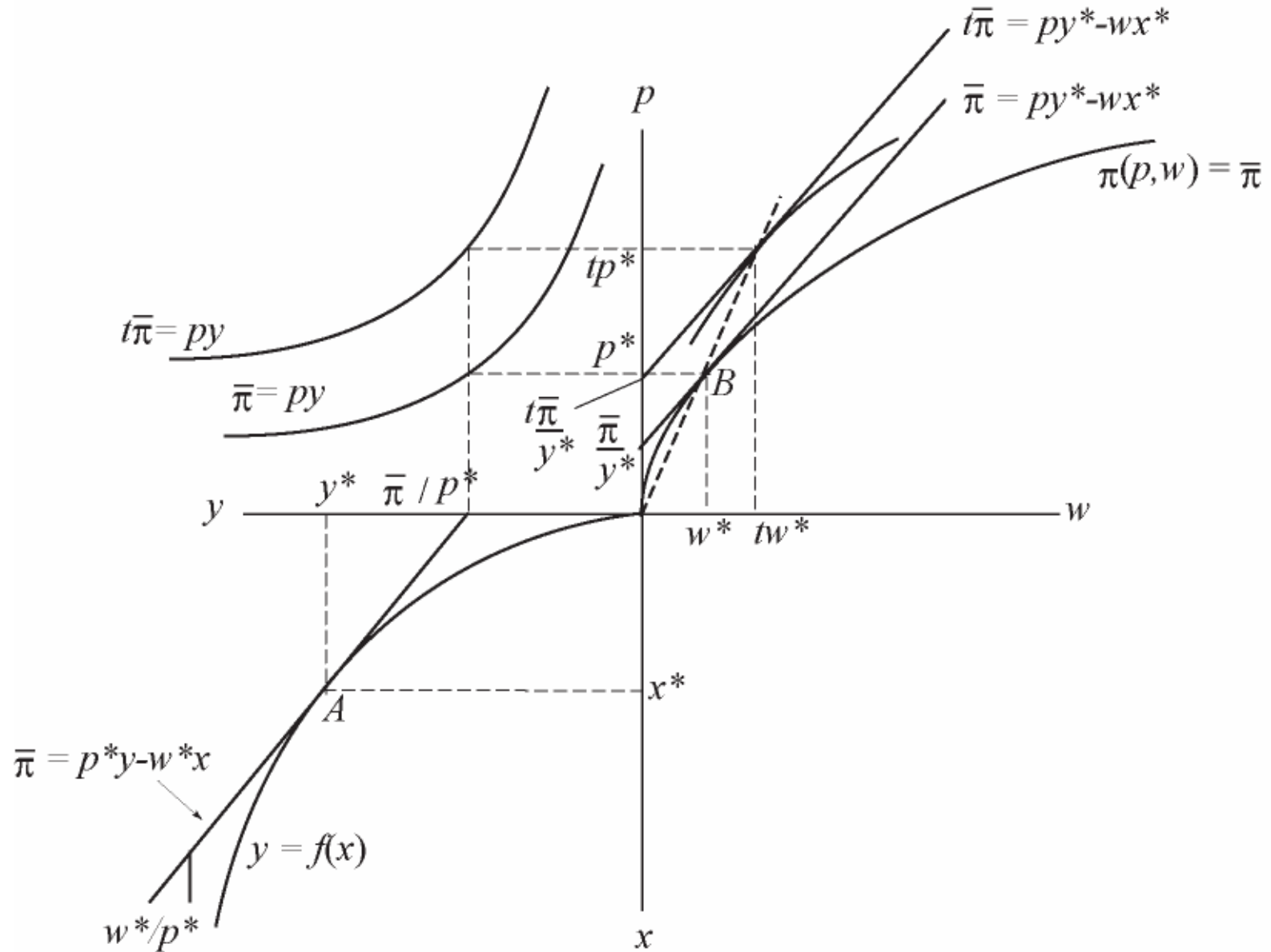
⑧ 価格フロンティア上の点(価格ベクトル)



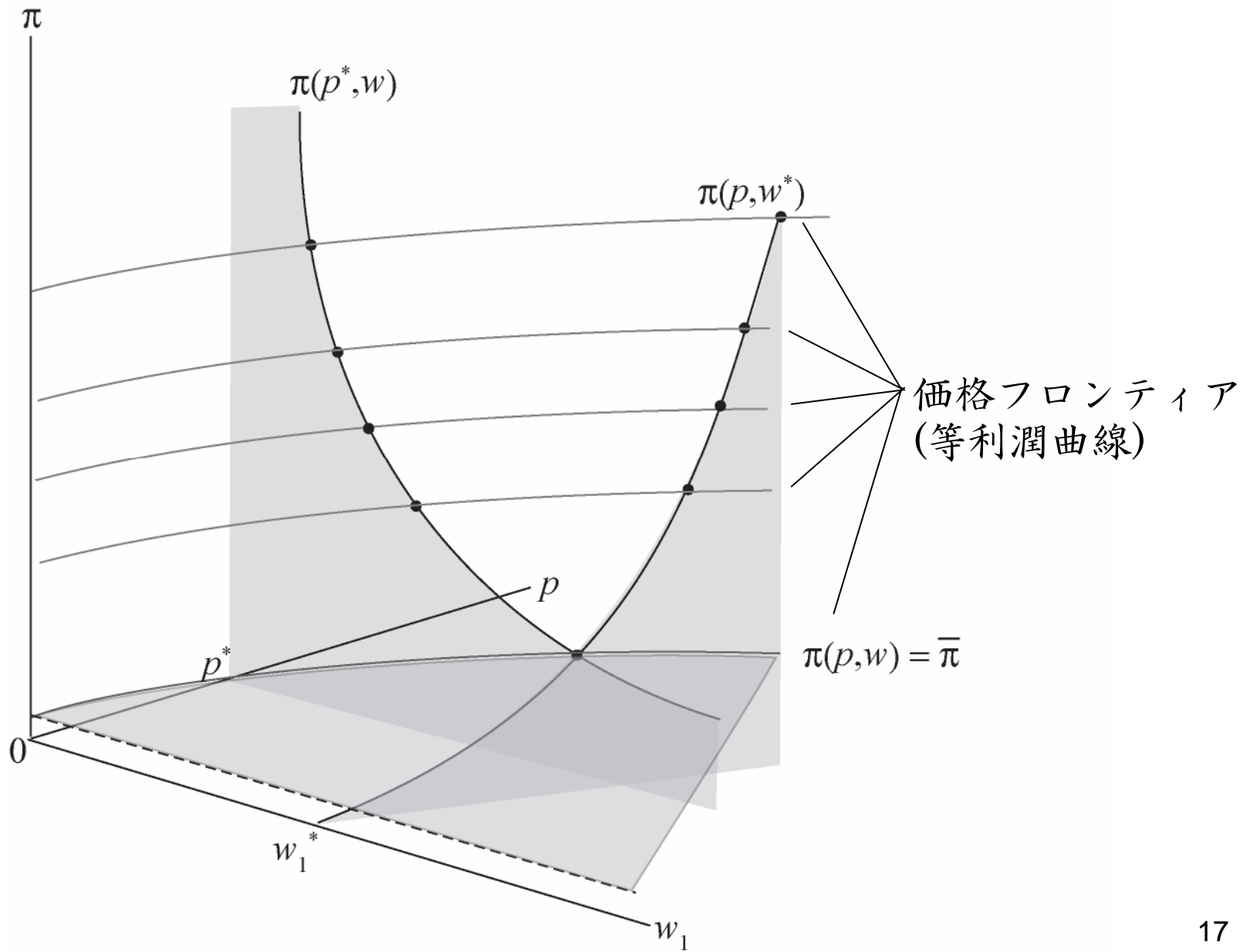
- その点で価格フロンティアに接する
等利潤線上にある
- 価格フロンティアに接する
他のどの等利潤線よりも、その上方にも無い

価格フロンティア = 等利潤線の下方包絡線 ⇒ 価格に関する凸関数

⑨利潤関数の価格に関する1次同次性 (事実B.35).



利潤関数

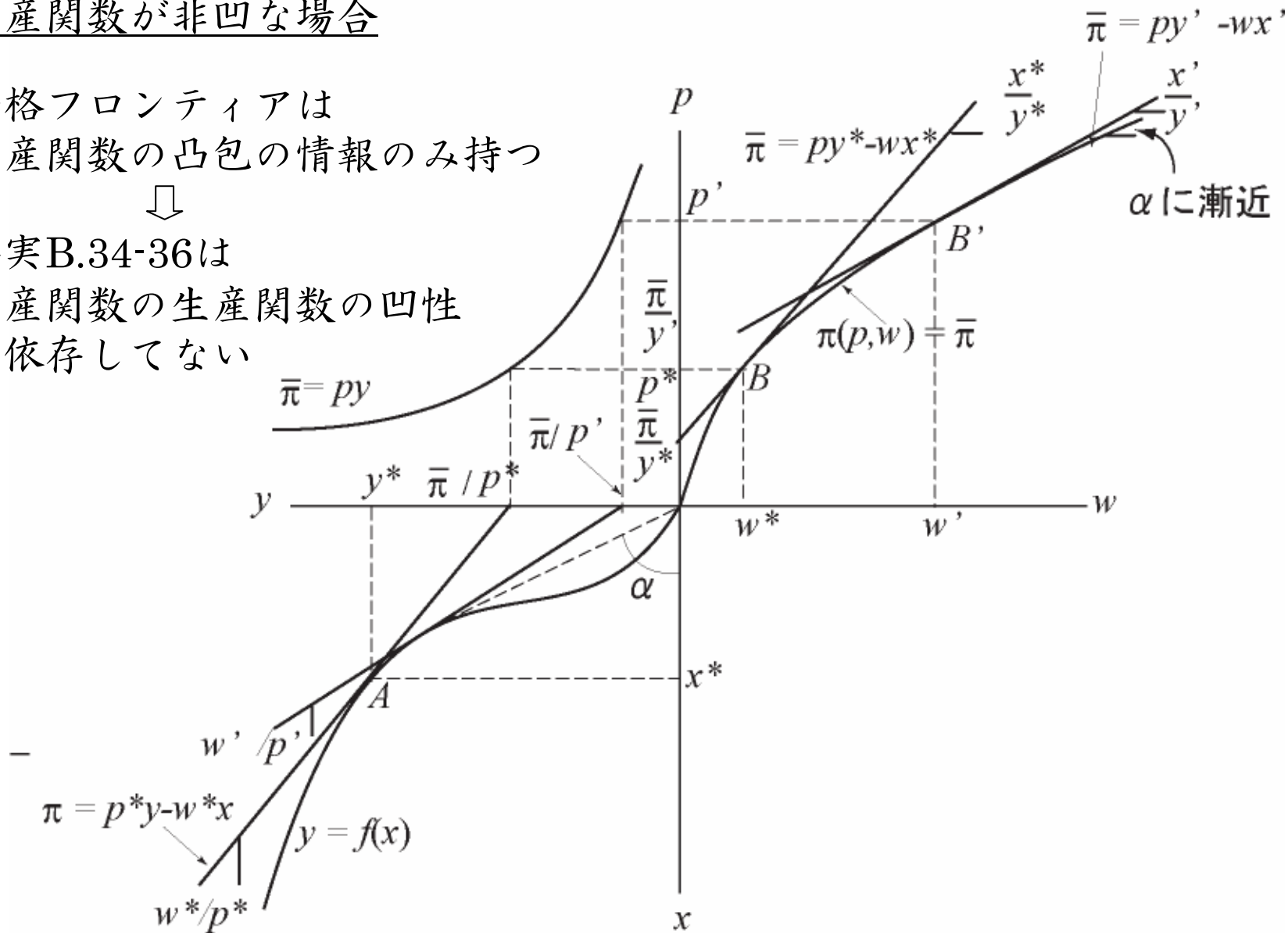


生産関数が非凹な場合

価格フロンティアは
生産関数の凸包の情報のみ持つ



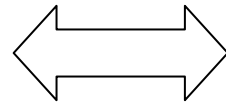
事実B.34-36は
生産関数の生産関数の凹性に
依存してない



$$\max_{x,y} p^*y - \sum_{i=1}^n w_i^*x_i$$

s. t. $f(x) = y$

双対問題

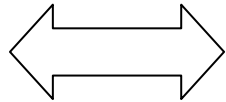


$$\min_{p,w} \pi(p, w)$$

s. t. $py^* - \sum_{i=1}^n w_ix_i^* = \pi^*$

双対性

(凹)生産関数



(凸)利潤関数

利潤関数の凸性

+

2階微分可能性

↓

事実B.39

$D^2\pi(p, w)$: 対称半正值定符号

供給・要素需要の価格効果

$$\frac{\partial}{\partial p} s(p, w) \geq 0$$

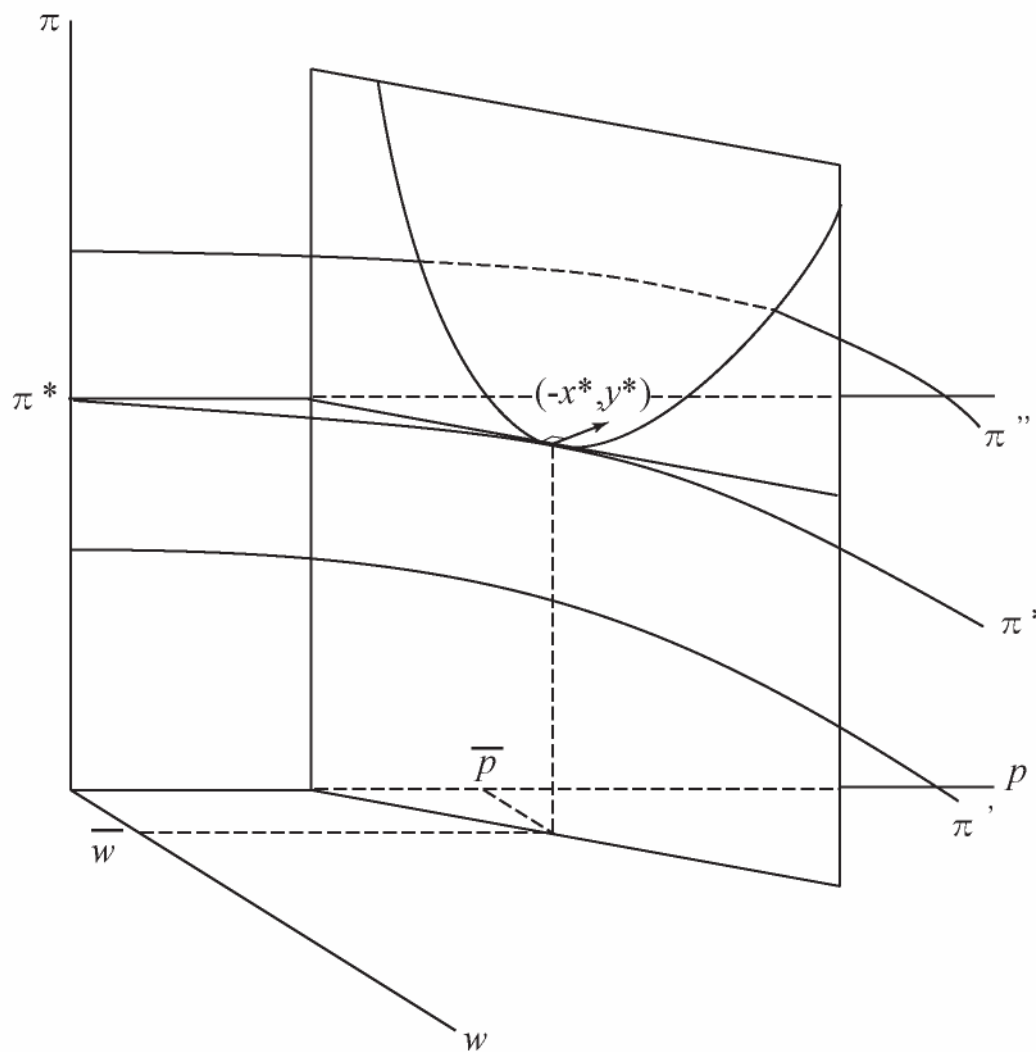
$$\frac{\partial}{\partial w_i} d_i(p, w) \leq 0$$

価格効果の交叉対称性

$$\frac{\partial}{\partial w_j} d_i(p, w) = \frac{\partial}{\partial w_i} d_j(p, w)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_i} s(p, w) = \bar{\nabla} \frac{\partial}{\partial p} d_i(p, w)$$

双対問題2階条件



供給+要素需要の法則

$$\text{ホテリングの補題: } D\pi(p, w) = \begin{bmatrix} s(p, w) \\ -d(p, w) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ds(p, w) \\ d(-d(p, w)) \end{bmatrix} = D^2\pi(p, w) \begin{bmatrix} dp \\ dw \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dp \\ dw \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ds(p, w) \\ d(-d(p, w)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dp \\ dw \end{bmatrix} \cdot D^2\pi(p, w) \begin{bmatrix} dp \\ dw \end{bmatrix} \geq 0$$

半正値定符号

i.e, 生産財価格・供給量は同一方向に動く
要素価格・要素需要は反対方向に動く

供給+要素需要の法則(離散バージョン)

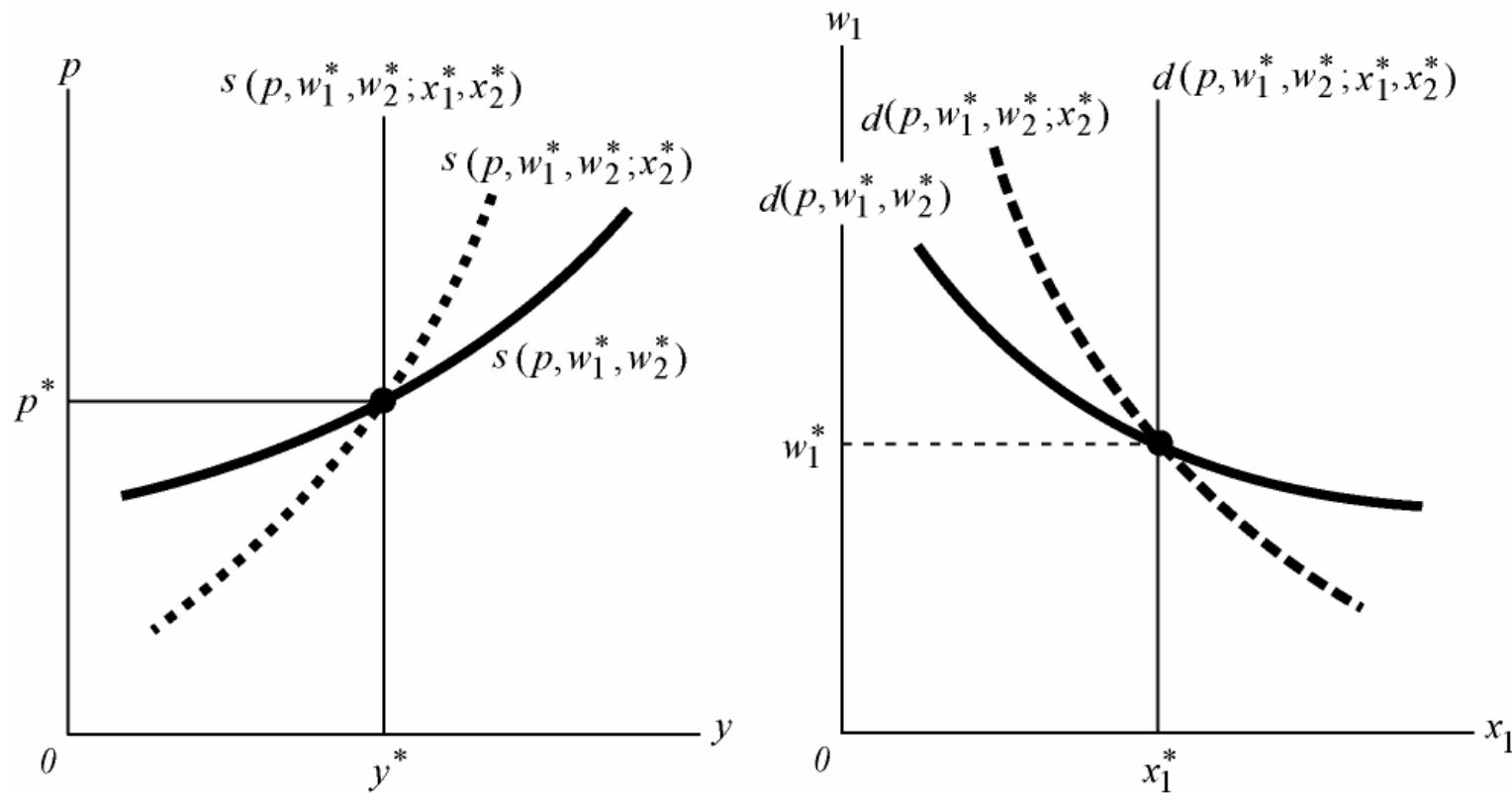
$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} p - p' \\ w - w' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(p, w) - s(p', w') \\ -d(p, w) + d(p', w') \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(p, w) \\ -d(p, w) \end{bmatrix}}_{= \pi(p, w)} - \underbrace{\begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(p', w') \\ -d(p', w') \end{bmatrix}}_{\leq \pi(p, w)} \\
 & \qquad \qquad \qquad \geq 0 \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} p' \\ w' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(p', w') \\ -d(p', w') \end{bmatrix}}_{= \pi(p', w')} - \underbrace{\begin{bmatrix} p' \\ w' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(p, w) \\ -d(p, w) \end{bmatrix}}_{\leq \pi(p', w')} \geq 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad \geq 0
 \end{aligned}$$

事実B.38 (ルシャトリエ原理—The LeChatelier principle)

供給・要素需要の価格弾力性：長期 > 短期

$$\frac{\partial}{\partial p} s(p^*, w^*) \geq \frac{\partial}{\partial p} s(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_i} d_i(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*) \geq \frac{\partial}{\partial w_i} d_i(p^*, w^*)$$



(a) 生産物供給曲線

(b) 要素需要曲線

$$g(p, w) \equiv \pi(p, w) - \underbrace{\pi(p, w_v, w_f; x_f^*)}_{w = (w_v, w_f)}$$

(p^*, w^*) の下での
長期利潤最大化解

$$x = (x_v^*, x_f^*)$$

$$g(p, w) \geq g(p^*, w^*) = 0$$

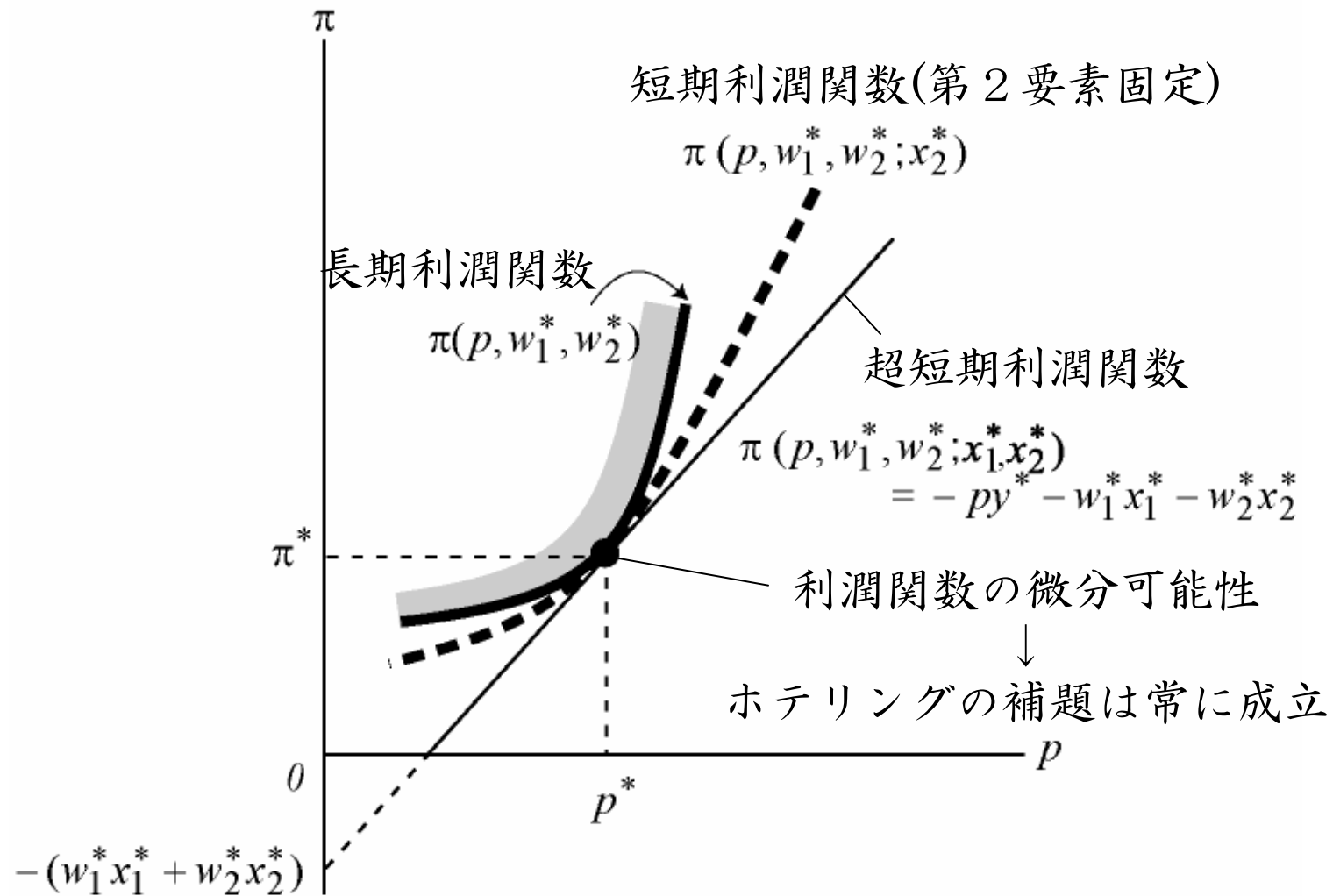
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} g(p^*, w^*) &= \frac{\partial}{\partial p} \pi(p^*, w^*) - \frac{\partial}{\partial p} \pi(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*) = 0 \\ &= s(p^*, w^*) \qquad \qquad \qquad = s(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w_i} g(p^*, w^*) &= \frac{\partial}{\partial w_i} \pi(p^*, w^*) - \frac{\partial}{\partial w_i} \pi(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*) = 0 \\ &= -d_i(p^*, w^*) \qquad \qquad \qquad = -d_i(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*) \end{aligned} \right.$$

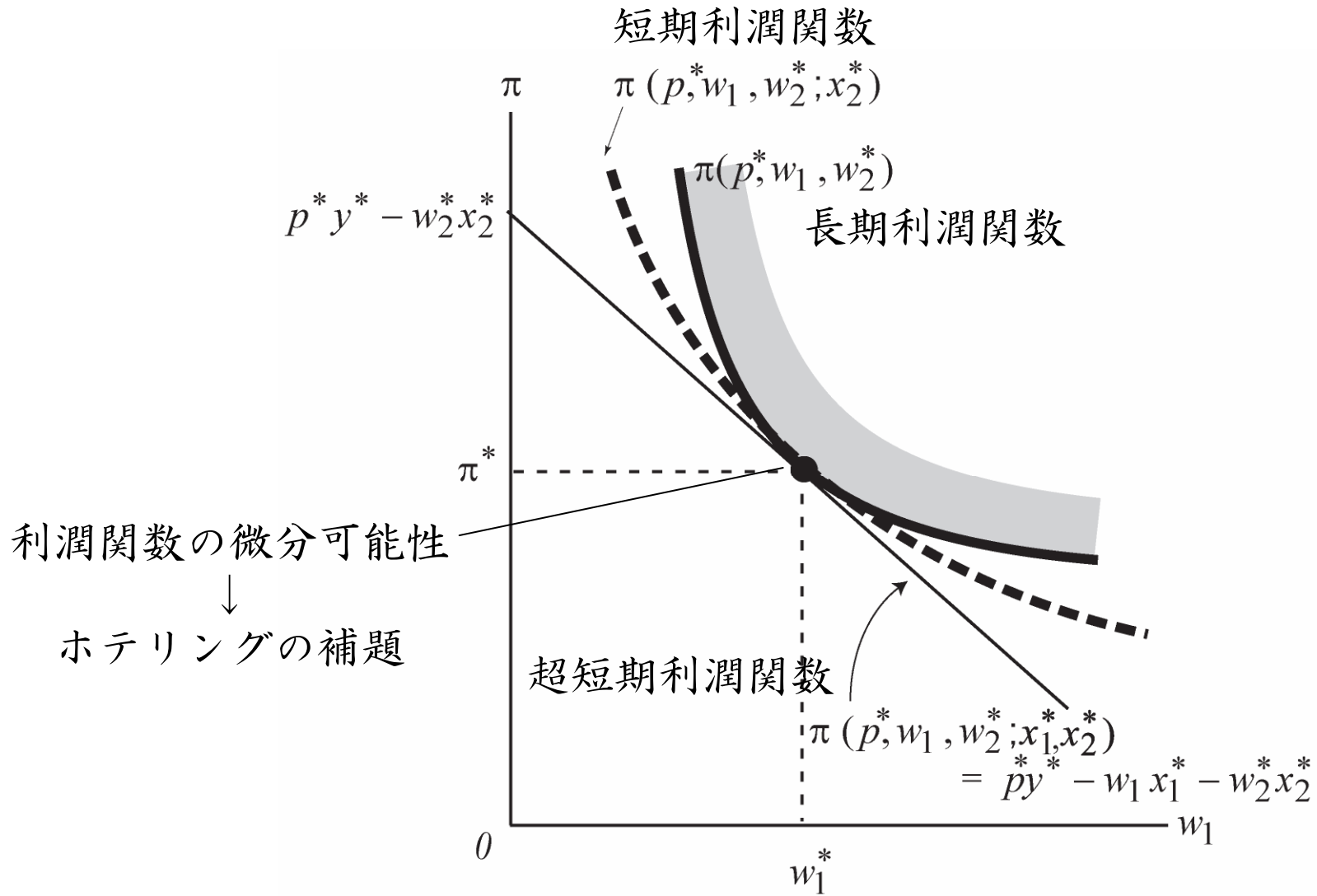
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} &= \frac{\partial}{\partial p} s(p^*, w^*) - \frac{\partial}{\partial p} s(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*) \geq 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial w_i^2} &= \frac{\partial}{\partial w_i} d_i(p^*, w_v^*, w_f^*; x_f^*) - \frac{\partial}{\partial w_i} d_i(p^*, w^*) \geq 0 \end{aligned} \right.$$

利潤関数の要素価格についての断面



利潤関数の生産財価格についての断面



事実B.40 (要素需要関数の価格効果の分解)

$$\frac{\partial d_i}{\partial w_j} = \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial w_j}}_{\longleftrightarrow} - \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial y} \frac{\partial h_j}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial p}}_{\longleftrightarrow}$$

代替効果
substitution effect

産出量効果
scale effect

$$\frac{\partial}{\partial w_i} h_i(y^*, w) \leq 0$$

正常要素 $\Rightarrow \frac{\partial h_i}{\partial y} > 0$

下級要素 $\Rightarrow \frac{\partial h_i}{\partial y} < 0$

内点解 $\Rightarrow \frac{\partial s}{\partial p} > 0$

証明

$$d_i(p, w) = h_i(s(p, w); w)$$



$$\frac{\partial}{\partial w_j} d_i(p, w) = \frac{\partial}{\partial w_j} h_i(y^*, w) + \frac{\partial}{\partial y} h_i(y^*, w) \frac{\partial}{\partial w_j} s(p, w)$$

産出量の変化
↓
制約付要素需要の変化

要素価格の変化
↓
最適産出量の変化

価格効果
対称性

恒等式

$$\begin{aligned} &= -\frac{\partial}{\partial p} d_j(p, w) \\ &= -\frac{\partial}{\partial p} h_j(s(p, w); w) \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} h_j(y^*, w) \frac{\partial}{\partial p} s(p, w) \end{aligned}$$

h_j

$$w_1 \rightarrow w'_1 (> w_1)$$

相対要素価格の変化

↓
代替効果

$$\frac{\partial^2 C}{\partial w_i \partial y} = \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial w_i} = \frac{\partial h_i}{\partial y}$$

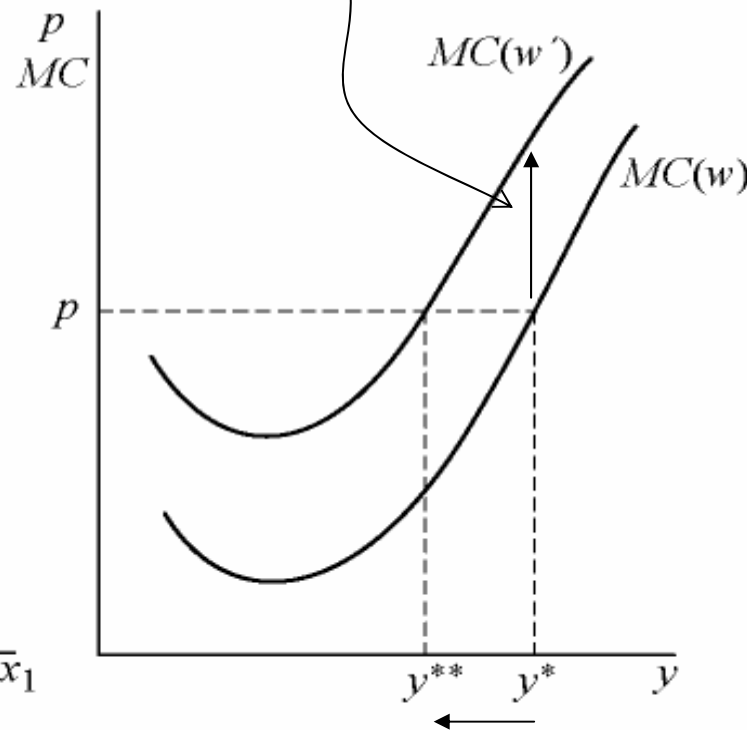
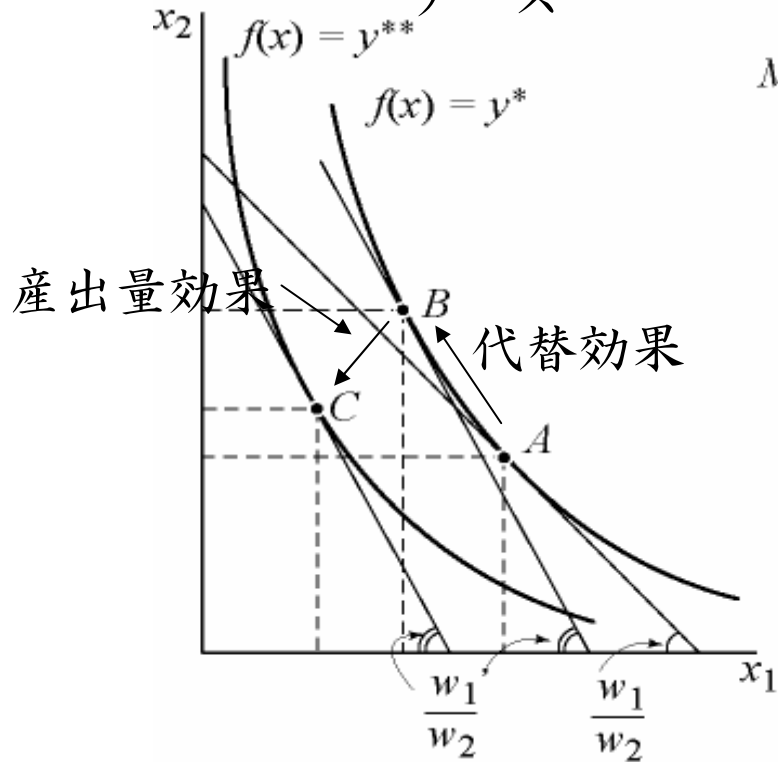
要素価格変化

↓
限界費用の変化

↓
最適産出量の変化

↓
要素需要の変化

正常財の
ケース



§ B.4.4 利潤・供給関数の集計

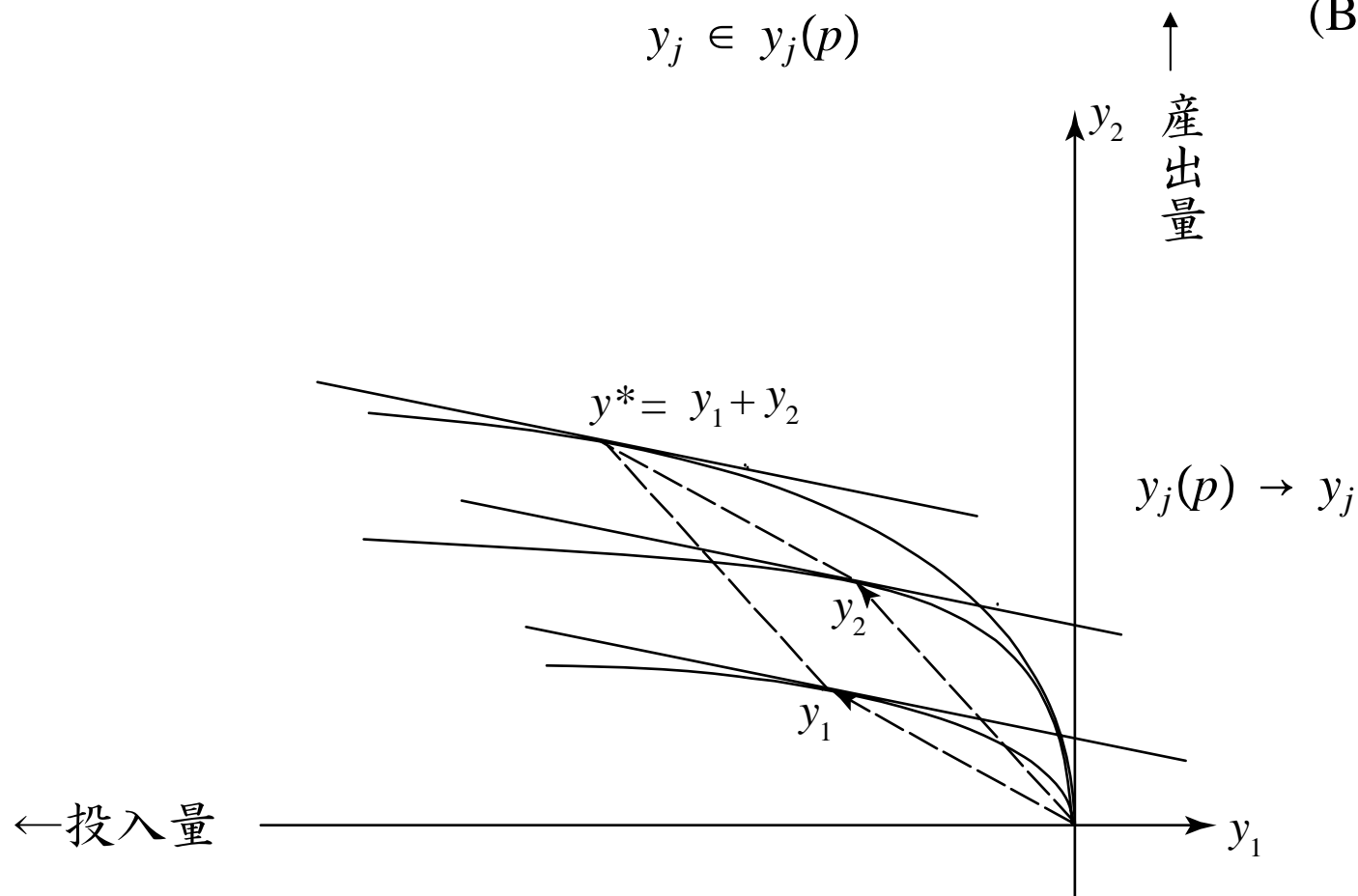
ここだけ、産出・投入量を net value として統一なベクトル y で表す

定義 B.33 (集計生産可能集合—aggregate production possibility set)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \cdots + \mathbf{Y}_J = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^L : \text{ある } y_j \in \mathbf{Y}_j, j = 1, \dots, J \text{ について } y = \sum_j y_j \right\}$$

$$y_j \in y_j(p)$$

(B,103)



定義B.32 (集計供給関数—aggregate supply function)

企業数： J

生産可能集合： $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_J$

$$y(p) = \sum_{j=1}^J y_j(p) = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^L : \text{ある } y_j \in y_j(p), j = 1, \dots, J \text{ について } y = \sum_j y_j \right\}$$

(B.101)

第 j 企業の供給関数



事実B.41 (集計供給に関する供給の法則—law of supply in aggregate)

$$dp \cdot dy_j (= dp \cdot Dy_j(p)dp) \geq 0$$

↓ 集計

$$dp \cdot dy (= dp \cdot \underbrace{Dy(p)}_{\text{半正值定符号}} dp) \geq 0 \quad (\text{B.102})$$

(離散的な価格・供給量変化、供給対応バージョンでも成立)

事実B.42 (利潤・供給関数の集計)

Y^* を生産可能集合としたときの「代表的企業」の利潤・供給関数

$$\text{任意 } p \gg 0 \text{ について } \begin{cases} \pi^*(p) = \sum_j \pi_j(p) & (\text{B.104}) \\ y^*(p) = \sum_j y_j(p) & (\text{B.105}) \end{cases}$$

$$\underline{\pi^*(p) \geq \sum_j \pi_j(p)}$$

$$\forall y_j \in \mathbf{Y}_j, \quad j = 1, \dots, J \Rightarrow \sum_j y_j \in \mathbf{Y}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \pi^*(p) \geq p \cdot \left(\sum_j y_j \right) = \sum_j p \cdot y_j \\ \downarrow \\ \pi^*(p) \geq \sum_j \pi_j(p) \end{array}$$

$$\underline{\pi^*(p) \leq \sum_j \pi_j(p)}$$

$$\sum_j y_j = y$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \forall y \in \mathbf{Y}, \quad p \cdot y = p \cdot \sum_j y_j = \sum_j p \cdot y_j \leq \sum_j \pi_j(p) \\ \downarrow \\ \pi^*(p) \leq \sum_j \pi_j(p) \end{array}$$