上級ミクロ経済学（前半）

京都大学経済研究所　森知也

平成 19 年 3 月 12 日

C　消費者の理論

C.1　消費選択に関する物理的・経済的制約

定義 C.1 (消費可能集合− consumption set) 消費財市場において取引される財の個数は $m(\geq 2)$ とし、消費選択に関する物理的制約を消費（可能）集合 $\mathbf{X}$ と呼び、以下ではその最も単純な場合として

$$\mathbf{X} = R_+^m \tag{C.1}$$

を仮定する。

定義 C.2 (消費計画− consumption plan) 消費者が消費を計画する各財の消費量ベクトルを $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{X}$ と表し、これを消費計画と呼ぶ。

定義 C.3 (予算集合− budget set) 消費財 $1, \ldots, m$ の価格 $p = (p_1, \ldots, p_m) \gg 0$ と所得 I を所与として、実現可能な消費計画 $x = (x_1, \ldots, x_m)$ は、(*i.e.,* 消費の経済的制約は) 予算集合

$$B(p, I) \equiv \{x \in \mathbf{X} | p \cdot x \leq I\} \tag{C.2}$$

により表される。

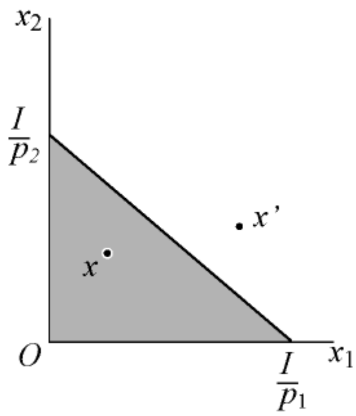

図 C.1: 消費財が 2 種類の場合の予算集合 $B(p, I)$。$x \in B(p, I)$ は実現可能であるが、$x' \notin B(p, I)$ は実現不可能。

C.2　選好関係

定義 C.4 (選好関係－ preference relation) 消費者は任意の２つの消費計画 $x, x' \in \mathbf{X}$ について自己の嗜好に基づく選好を持っており、以下のいずれかが当てはまる。

(i) 弱い意味での選好－ *weak preference* － $x \succeq x' \iff$ 消費者は x を x' より選好するか、または x と x' に関して無差別である。

(ii) 強い意味での選好－ *strict preference* － $x \succ x' \iff$ 消費者は x を x' より選好する。

(iii) 無差別－ *indifference* － $x \sim x' \iff [x \succeq x'$ かつ $x' \succeq x]$: 消費者は x と x' に関して無差別である。

定義 C.5 (合理的選好関係－ rational preference) 以下の性質を持つ選好関係 $\succeq$ を合理的であるという[1]。

(i) 完備性－ *completeness* －任意の消費計画 $x, x' \in \mathbf{X}$ について、$x \succeq x'$ と $x' \succeq x$ のうち少なくとも 1 つが成立する[2]。

(ii) 推移性－ *transitivity* －任意の消費計画 $x, x', x'' \in \mathbf{X}$ について、$x \succeq x'$ かつ $x' \succeq x''$ ならば、$x \succeq x''$ が成立する[3]。

事実 C.1 (合理的選好の性質) [4]選好関係 $\succeq$ が合理性 (定義 $C.5$) を満たすとき、以下が成立する。

(i) $\succ$ は非反射性－ *irreflexivity* － ($x \succ x$ は成立しない)、かつ推移性 (もし $x \succ y$ かつ $y \succ z$ なら $x \succ z$) を満たす。

(ii) $\sim$ は反射性 (全ての x について $x \sim x$ が成り立つ)、かつ推移性 (もし $x \sim y$ かつ $y \sim z$ なら $x \sim z$) を満たす。

(iii) もし $x \succ y \succeq z$ なら $x \succ z$ を満たす。

定義 C.6 (欲求に関する仮定) [5]

(i) 単調性－ *monotonicity* －消費計画 $x, x' \in \mathbf{X}$ について、$x \gg x' \Rightarrow x \succ x'$

(i') 強い単調性－ *strong monotonicity* － $x \geq x'$ かつ $x \neq x' \Rightarrow x \succ x'$

(ii) 局所的非飽和性－ *local non-satiation* －任意の消費計画 $x \in \mathbf{X}$ と任意の $\varepsilon > 0$ について、$x' \succ x$ かつ $|x' - x| < \varepsilon$ であるような消費計画 $x' \in \mathbf{X}$ が存在する[6]。

事実 C.2 (単調性と局所非飽和性) 単調性 $\Rightarrow$ 局所非飽和性

事実 C.3 (局所非飽和な選好の性質) 局所的非飽和性の下では、任意の $x \in \mathbf{X}$ を含む無差別集合 $I(x) \equiv \{x' \in \mathbf{X} : x' \sim x\}$ が幅を持つこと (図 $C.2a$ 参照) を排除する。さらに、予算集合内での選好最大化において予算制約は等号で有効となる (予算集合 $B(p, I)$ 内で最も選好される消費計画 x において $p \cdot x = I$ が成立する)。

事実 C.4 (選好の単調性と無差別集合) 消費財が 2 種類の場合 (図 $C.2$ 参照)、合理的選好関係が単調性（定義 $C.6(i)$）を満たすならば、無差別集合 $I(x) \equiv \{x' \in R^2_+ | x' \sim x\}$ が「厚み」を持つことはない。つまり、無差別集合は「無差別曲線」となる。さらに、無差別曲線はお互いに交わらない右下がりの曲線となる。

---

[1] このような選好関係は選好順序－ preference order －とも呼ばれる。合理的選好を持つ消費者は、有限個の任意な選択肢に対して「最善」から「最悪へと整然と順序づけすることができる。

[2] Varian[5, p.95] に、反射性－ reflexivity －として、「任意の消費計画 $x \in R^m_+$ について、$x \succeq x$ が成立する」という性質が仮定されているが、これは完備性より導かれる。

[3] 推移性を満たさない選好関係は、例えば、3 つの消費計画 x, x', x'' の間に、$x \succeq x', x' \succeq x'', x'' \succeq x$ なる場合である。このとき、x に替えて x'' をとり、x'' に替えて x' をとり、より望ましい消費計画に取り替えることを積み上げていくと、最後にまたもとの x に戻ってくることになり、最善の消費計画は存在しない。

[4] MWG[4, p.7, Prop.1.B.1, Ex.1.B.1-2.]

[5] MWG [4, Def.3.B.2,3]

[6] $|x' - x|$ は x と x' の間のユークリッド距離。

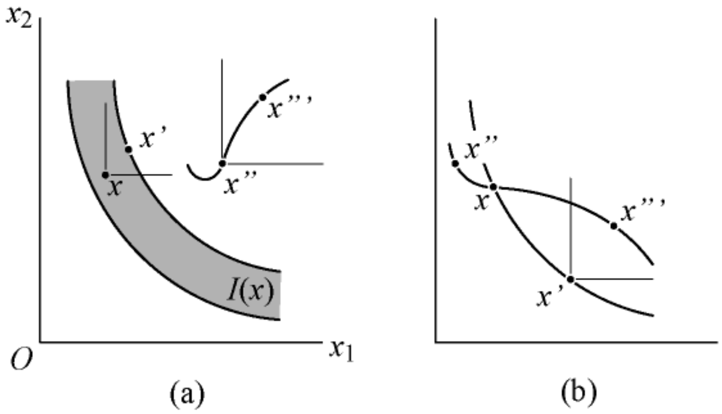

図 C.2: (a) 無差別集合 $I(x)$ が厚みを持つならば、$x < x'$ でありながら $x \sim x'$ であるものが存在し選好の強い凸性に矛盾する。同様に、無差別曲線が右上がりであれば、$x'' < x'''$ でありながら $x'' \sim x'''$ となるものが存在する。(b) 同様な理由で無差別曲線が交わることもない。

定義 C.7 (選好の凸性) 選好関係の凸性は以下のように定義される。

(i) 凸性－ *convexity* －消費計画 $x, x', x'' \in \mathbf{X}$ が $x \succeq x''$ と $x' \succeq x''$ を満たすならば、任意の $t \in (0,1)$ について $tx + (1-t)x' \succeq x''$ が成立する。

(ii) 強い凸性－ *strong convexity* －消費計画 $x, x', x'' \in \mathbf{X}$ が $x \succeq x''$ と $x' \succeq x''$ を満たし、かつ $x \neq x'$ ならば、任意の $t \in (0,1)$ について、$tx + (1-t)x' \succ x''$ が成立する。

選好の凸性は、消費財が 2 種類の場合に図 C.3 を用いて以下のように解釈できる。

(i) ある財の消費量が増大していくとき、そのような増加による追加的利得は次第に小さくなる。つまり、図 (a) の無差別集合上 $I(x)$ 上において $\delta > \eta > 0$。

(ii) 消費者は、特定の財に偏った消費計画よ り、多様な財の消費を欲求する (図 b)。

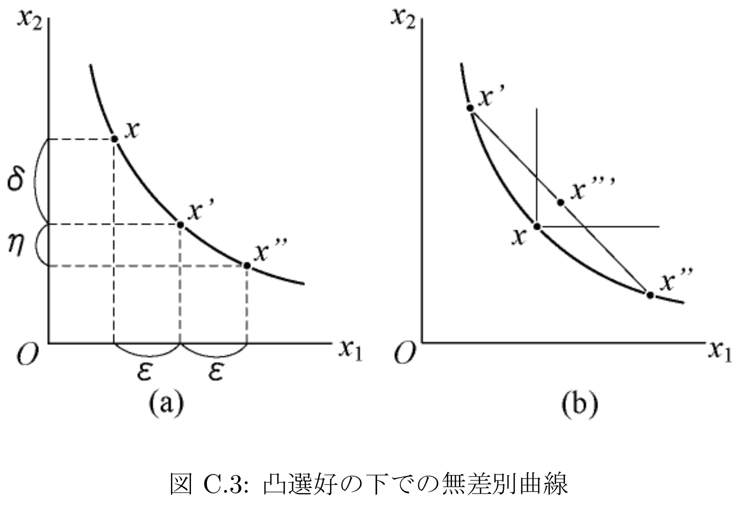

図 C.3: 凸選好の下での無差別曲線

定義 C.8 (選好の連続性－ continuity) [7]任意の消費計画 $x \in \mathbf{X}$ について、$P(x) \equiv \{x' \in \mathbf{X} | x' \succeq x\}$ および $P^{-1}(x) \equiv \{x' \in \mathbf{X} | x \succeq x'\}$ は $\mathbf{X}$ 内の閉集合である[8]。

[7]選好関係の合理性と連続性は、連続な効用関数の存在のための十分条件となる（事実 C.5)。

[8]従って、$\{x' \in \mathbf{X} | x' \succ x\}$ と $\{x' \in \mathbf{X} | x \succ x'\}$ は開集合である。

選好関係の連続性は図 C.4 を用いて以下の手順で理解できる。$P(x)$ 内で、収束する (消費計画の) 点列 $\{x^t\}_{t=1}^{\infty}$ を考えると、この任意 t 番目の点 x^t において $x^t \succeq x$ が成立する。もし、この点列の収束先 x^* が $P(x)$ と $P^{-1}(x)$ の境界 $I(x) \equiv \{x' \in \mathbf{X} | x' \sim x\}$ を越えて $P(x)$ を外れたすれば、点列の各点 x^t において $x^t \succeq x$ が満たされていながら、収束先 x^* において $x \succ x^*$ が成立することになる。つまり、終始 x より「悪くない」消費計画を辿りながらも、最終的には突如 x より厳密に「悪い」消費計画に行き着くことになる。選好関係の連続性は、このように突如選好関係が一転するような場合が存在しないことを意味する。

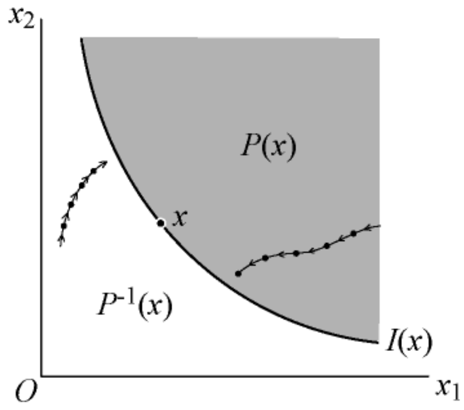

図 C.4: 選好の連続性

C.3　効用関数

効用－ utility －とは、消費者が消費などから得られる満足度を効用関数として抽象化することにより数量により表したものである。効用関数は、消費量と効用の関係を関数として表したもので、以下のように定義される。

定義 C.9 (効用関数－ utility function) 選好関係 $\succeq$ に対して、ある関数 $u : \mathbf{X} \to R$ が、任意の消費計画 $x, x' \in \mathbf{X}$ について

$$u(x) \geq u(x') \Leftrightarrow x \succeq x' \tag{C.3}$$

を満たすならば、u はこの選好関係を表現する効用関数である。

事実 C.5 (効用関数の存在－ exisitence of utility function) [9]合理的選好関係が連続性を満たすとき、その選好関係を表現する連続な効用関数 $u : \mathbf{X} \to R$ が存在する。

証明. (消費財が 2 種類かつ選好が強い意味の単調の場合の直感的説明)[10]

$x \geq x'$ かつ $x \neq x'$ であるような 2 つの消費計画 x, x' を通る無差別曲線 $I(x), I(x')$ を描くと (図 C.5)、これらは交わらない右下がりの曲線である (事実 C.4 参照)。さらに、$x \geq x'$ であるから、選好の強い単調性より $I(x)$ は $I(x')$ より右上方に位置する。次に、原点 O を通る R_+^2 内の 45 度線を引き、$I(x)$ および $I(x')$ との交点をそれぞれ x_*, x'_* とする。このとき、$x \succ x'$ より、$x_* > x'_*$ である。

いま、$u(x) \equiv |0, x_*|$ により関数 $u : R_+^2 \to R$ を定義すると、

$$x \succ x' \Leftrightarrow x_* > x'_* \Leftrightarrow |0, x_*| > |0, x'_*| \Leftrightarrow u(x) > u(x')$$
$$x \sim x' \Leftrightarrow x_* = x'_* \Leftrightarrow |0, x_*| = |0, x'_*| \Leftrightarrow u(x) = u(x')$$

[9]MWG[4, Prop.3.C.1, p.47], Varian[5, p.97] 参照。
[10]直感的な説明は、奥野・鈴村 [8, p.153] 参照。選好の単調性の下での厳密な証明は、Jehle and Reny[2, Theorem 1.1, pp.14-16]、MWG[4, pp.47-49, Prop.3.C.1] 参照。

が得られ、u が効用関数の一つであることが分かる。u の連続性は、x と x' が十分近ければ、対応する x_* と x'_* も十分近くなることより成立する。 □

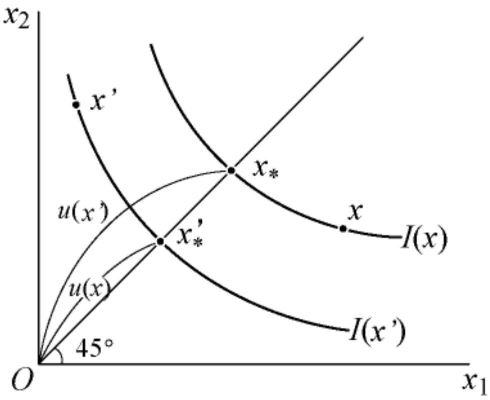

図 C.5: 効用関数の存在

注意 C.1 関数 u が合理的選好関係 $\succeq$ を表現する効用関数ならば、任意の単調増加関数 $\phi : R \to R$ を用いて、任意の消費計画 $x \in R^m_+$ に対して

$$U(x) \equiv \phi(u(x)) \tag{C.4}$$

により定義される関数 $U : R^m_+ \to R$ も、同様に $\succeq$ を表現する効用関数である。つまり、効用関数は「序数的－ *ordinal*」尺度であり、２つの消費計画から得られる効用水準の大小関係のみ (つまり効用水準の順位のみ) 意味を持ち、これらの効用水準の比や差は意味を持たない。

事実 C.6 (凸選好と効用関数) 合理的選好関係が単調性 (定義 *C.6(i)*)、凸性 (定義 *C.7(i)*)、かつ連続性 (定義 *C.8*) を満たすとき、対応する効用関数 $u : \mathbf{X} \to R$ は準凹関数である。強い意味の凸性 (定義 *C.7(ii)*) に対しては、強い意味の準凹関数が対応する。

定義 C.10 (限界効用－ marginal utility) 消費量を 1 単位増加させたときに追加的に得られる効用。効用関数が微分可能な場合は、第 i 財の限界効用は $\partial u(x)/\partial x_i$ で表される。

定義 C.11 (限界代替率－ marginal rate of subustitution) 効用水準を一定に保ったまま、ある財の消費を 1 単位減少させるとき、他の財の消費量をどの程度増加させなければならないかを表したもの。効用関数が微分可能であれば、消費計画 $x \in \mathbf{X}$ における第 i 財の第 j 財に対する限界代替率 $MRS_{ij}(x)$ は

$$MRS_{ij}(x) \equiv \frac{\partial u(x)/\partial x_i}{\partial u(x)/\partial x_j}, \quad i, j = 1, \ldots, m \tag{C.5}$$

により定義される[11]。

証明. 限界代替率の表現としての式 (C.5) は証明を要する。第 i, j 財以外の消費量を固定し、第 j 財の消費量 x_j が与えられたときに、効用水準 $\overline{u}$ を得るための第 i 財の消費量 x_i の値を、関数 $x_i(x_j)$ として定義する（第 i, j 財以外の消費量を省略して書けば、$u(x_i(x_j), x_j) = \overline{u}$ が成り立っている)。このとき、限界代替率は

$$MRS_{ij} = -\frac{dx_i(x_j)}{dx_j} \tag{C.6}$$

[11] 必要投入量集合が凸である生産技術の場合と同様に、凸選好の下では「限界代替率逓減の原理－ principle of diminishing marginal rate of substitution」が成立する（事実 B.4 参照)。

で定義される。ここで、$u(x_i(x_j), x_j)$ を x_j について微分すると

$$\frac{\partial u(x_i, x_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial u(x_i, x_j)}{\partial x_i}\frac{dx_i(x_j)}{dx_j} = 0$$

が得られ、これを書き直せば $(C.5)$ が得られる。□

無差別曲線

C.4 効用最大化問題

予算集合（C.2）の下で合理的消費者の行動は、以下の効用最大化問題− utility maximization problem (UMP) −として書ける。

$$v(p, I) \equiv \max_{x \in B(p,I)} u(x) \tag{C.7}$$

$v(\cdot)$ は間接効用関数− indirect utility function −と呼ばれる。ラグランジュ関数を

$$L(x, \lambda) = u(x) + \lambda (I - p \cdot x) \tag{C.8}$$

とし、クーン・タッカー条件を適用すると、(内点解を仮定すれば) 以下の最適１階条件が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u(x^*) - \lambda^* p_i = 0 \tag{C.9}$$

$$I - p \cdot x^* \geq 0 \tag{C.10}$$

$$\lambda^* (I - p \cdot x^*) = 0 \tag{C.11}$$

さらに、局所的非飽和性を仮定すれば $\lambda^* > 0$ であり[12]、予算制約は等号制約

$$p \cdot x^* = I \tag{C.12}$$

で表され (事実 C.3)、(C.10, C.11) は

$$I - p \cdot x^* = 0 \tag{C.13}$$

となる。特に、（C.9）は、各２消費財 i, j 間に

$$MRS_{ij} \equiv \frac{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i}}{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j}} = \frac{p_i}{p_j} \tag{C.14}$$

が成立していることを意味し、最大化効用水準 $u(x^*)$ に対応する無差別曲線と予算制約線 $p \cdot x = I$ が、x^* において接していることを意味する。また、u が２階微分可能である場合、最適２階条件は、$D_x^2 u(x^*)$ が半負値定符号であることにより与えられる。

定義 C.12 (マーシャルの需要関数− Marshallian demand function) [13]効用最大化問題 $(C.7)$ の最適消費ベクトル $x(p, I)$ はマーシャルの需要関数と呼ばれる。

事実 C.7 (マーシャルの需要関数の性質) 効用関数 $u : \mathbf{X} \to R$ が、$\mathbf{X}$ 上で定義された局所的非飽和な選好関係 $\succeq$ を表す連続関数であるとき、マーシャルの需要関数 $x(p, I)$ は以下の性質を持つ。

(i) (p, I) に関して０次同次である。

(ii) 任意の $x \in x(p, I)$ は $p \cdot x = I$ を満たす。

(iii) 選好関係が凸 (つまり効用関数が準凹関数) ならば凸集合であり、さらに選好関係が強い意味の凸 (効用関数が強い意味の準凹) ならば、１要素からなる需要関数である。

[12] λ^* は最適における所得の限界効用（所得１単位の上昇に伴う最大化効用水準の増分) となる。

[13] 第 C.5 節で解説する支出最小化解としての補償需要関数− compensated demand function と区別するために、非補償需要関数− uncompensated demand function, 通常の需要関数− ordinary demand function, マーシャルの需要関数− Marshallian demand function, ワルラスの需要関数− Walrasian demand function などと呼ばれることもある。

証明. (i) 任意の $t>0$ につき、$B(p,I)=B(tp,tI)$ より $x(p,I)=x(tp,tI)$ が従う。

(ii) 効用最大化問題 $(C.7)$ の解 x^* において $p\cdot x^*<I$ であるとする。局所的非飽和により、x^* の近傍に $x\succ x^*$ か $p\cdot x<I$ となる x が存在し最適に矛盾する。

(iii) 選好関係 $\succsim$ の下で、任意の $x,x'\in x(p,I)$ に対して、全ての $x''\in B(p,i)$ について $x\succsim x''$ かつ $x'\succsim x''$ が成り立つ。このとき、x と x' の任意の凸結合 x^λ について、$B(p,I)$ が凸集合であることから $x^\lambda\in B(p,I)$、$\succsim$ が凸であることから $x^\lambda\succsim x''$ が成り立つ。従って $x^\lambda\in x(p,I)$。

次に、$\succsim$ が強い意味の凸選好であるとき、$x,x'\in x(p,I)$ とする。すると、上記と同様に $x^\lambda\succ x$ かつ $x^\lambda\in B(p,I)$ となり、$x\in x(p,I)$ と矛盾する。従って強い意味の凸選好の下で、$x(p,I)$ は 1 要素からなる。
□

事実 C.8 (間接効用関数の性質) 効用関数 $u:\mathbf{X}\to R$ が、$\mathbf{X}$ 上で定義された局所的非飽和な選好関係 $\succeq$ を表す連続関数であるとき、$v(p,I)$ は以下の性質を持つ。

$(i)(p,I)$ の 0 次同次関数である。

$(ii)p\geq p'\Rightarrow v(p,I)\geq v(p',I)$

$(iii)I>I'\Rightarrow v(p,I)>v(p,I')$

$(iv)p$ の準凸関数 : 任意の t について $\{p\in\mathbf{X}|v(p,I)\leq t\}$ が凸集合である。

$(v)p\gg 0,I>0$ において連続関数である。

証明と解説. (i) 任意の $t>0$ につき、$B(p,I)=B(tp,tI)$ より $v(p,I)=v(tp,tI)$ が従う。

$(ii)p\geq p'$ ならば $B(p,I)\subset B(p',I)$ となり、$v(p,I)\leq v(p',I)$ が従う。

$(iii)(ii)$ と同様な方法で、所得 I についても非減少性を示すことができる。さらに、局所的非飽和な選好の下では強い意味での増加関数となる (事実 $C.7(ii)$ の証明を参照)。

(iv)MWG[4, Prop.3.D.3, p.56] または Varian[5, p.103] を参照 (双対問題 $(C.15)$ の最適 2 階条件)。この結果は効用関数 $u(\cdot)$ の準凹性に依存しないことに注意せよ。このことは、消費財が 2 種類の場合について、図 $C.6$ を用いて直感的に理解できる。所得 I を固定し、同一の間接無差別曲線上の 2 点 x,x' が最適消費ベクトルとなるような価格ベクトルを、それぞれ p,p' をとして、p と p' の凸結合 $p''=tp+(1-t)p''$（ただし $0\leq t\leq 1$）を考える。所得 I と価格 p,p',p'' の下での予算制約線は x_1-x_2 平面において x'' において一点で交わる。$x''\in B(p,I)$ かつ $x''\in B(p',I)$ より、選好の凸・非凸に関わらず、$x\succsim x''$ が成り立つ。つまり、$v(p'',I)\leq v(p,I)=v(p',I)$ である。原点により近い間接無差別曲線がより高い効用水準に対応していることから、このことは間接無差別曲線が原点に向かって凸であり、つまり間接効用関数 $v(p,I)$ が価格 p に関して準凸関数であることを意味する。

(v) 予算集合 $B(p,I)$ がコンパクト、かつ、任意の $p\gg 0$ および $I>0$ に対して連続、$u(\cdot)$ も $\mathbf{X}$ 上で連続であることから、最大定理− maximum theorem −（Takayama[9, Theorem 2.D.14, p.254]) により、$v(p,I)$ は $p\gg,I>0$ の連続関数である。 □

上記の間接効用関数の性質は、消費財が 2 種類の場合について、生産者の行動における等量曲線と要素価格フロンティアの間の双対性（図 B.6) と同様にして、無差別曲線と間接無差別曲線の間の双対性を通して幾何学的に理解を深めることができる。以下では、効用関数が強い準凹関数である場合について、図 C.7〜C.9 を用いて解説する（図 C.8・C.9 の描き方は図 B.6 を参照)。

1. 所得 I、価格 $p=(p_1,p_2)$ を所与としたときの効用最大化消費点は図 C.7 中 x^* で与えられるとする。所得 I の下で消費点 x^* を丁度購入し得るように (予算線が x^* を通るように)、価格を調整した予算集合の下での最適消費計画（x^{**} や x^{***}）において達成される効用水準は、図に見られるように、（選好の凸性の下で）$u(x^*)$ を上回る。つまり、x^* は、所得 I を所与としたとき、価格 p 以外の価格下では最適ではない。消費計画 x^* と効用水準 u^* が効用最大化問題（C.7）の最適解となるような価格ベ

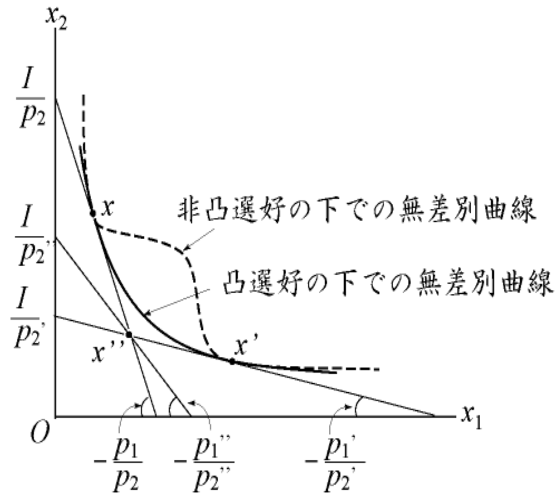

図 C.6: 間接効用関数の準凸性と無差別曲線の形状

クトル p と所得 I は、効用最大化問題において与件であった (p, I) を内生変数とし、以下の双対問題の最適解として得られる。

$$\begin{aligned} &\min_{p \gg 0, I > 0} v(p, I) \\ &s.t. \quad p \cdot x^* \leq I \\ &\qquad v(p, I) \geq u^* \end{aligned} \tag{C.15}$$

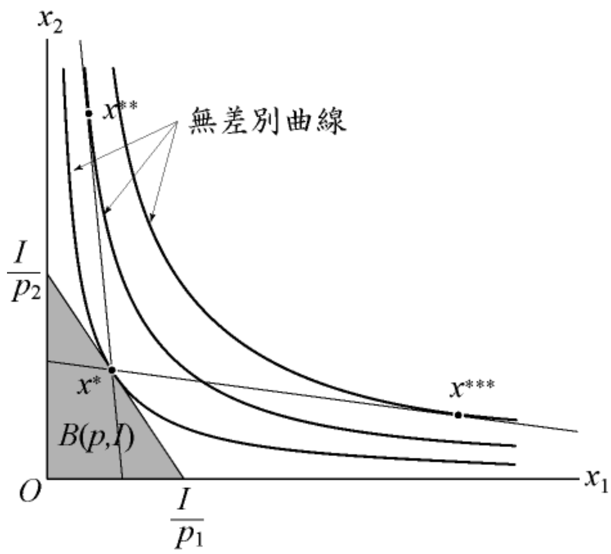

図 C.7: 効用関数と間接効用関数の双対性

2. 費用関数における要素価格フロンティアと同様な手順で、量平面における無差別曲線に対する価格平面における間接効用の無差別曲線 (間接無差別曲線) を図 C.8 のように描くことができる（図 C.7 における消費ベクトル x^{**} と x^{***} が最適となる価格ベクトルを、それぞれ、p^{**} と p^{***} として描いて

ある）。効用関数が準凹関数である場合、間接無差別曲線は、無差別曲線と同様原点に向かって凸となる。

3. 図 C.9 では、p^{***} を比例的に $a \in (0,1)$ 倍縮小した $p^{****} = ap^{***}$ の下での最適消費ベクトル x^{****}、および対応する無差別・間接無差別曲線を描いている。所得一定の下で価格が下落すれば、予算集合は拡大し、最大化効用水準は上昇する。このとき、対応する間接無差別曲線は原点方向に、また、無差別曲線は原点から離れる方向に移る。

4. また、消費ベクトル図 C.7 中の x^* が最適消費ベクトルとなる価格ベクトル p^* は p^{**} と p^{***} の凸結合であり、間接無差別曲線が原点に対して凸であることから、p^* を含む間接無差別曲線は p^{**} および p^{***} を含むものよりも原点から離れ、より低い効用水準に対応する（図 C.9 参照）。、これらより、間

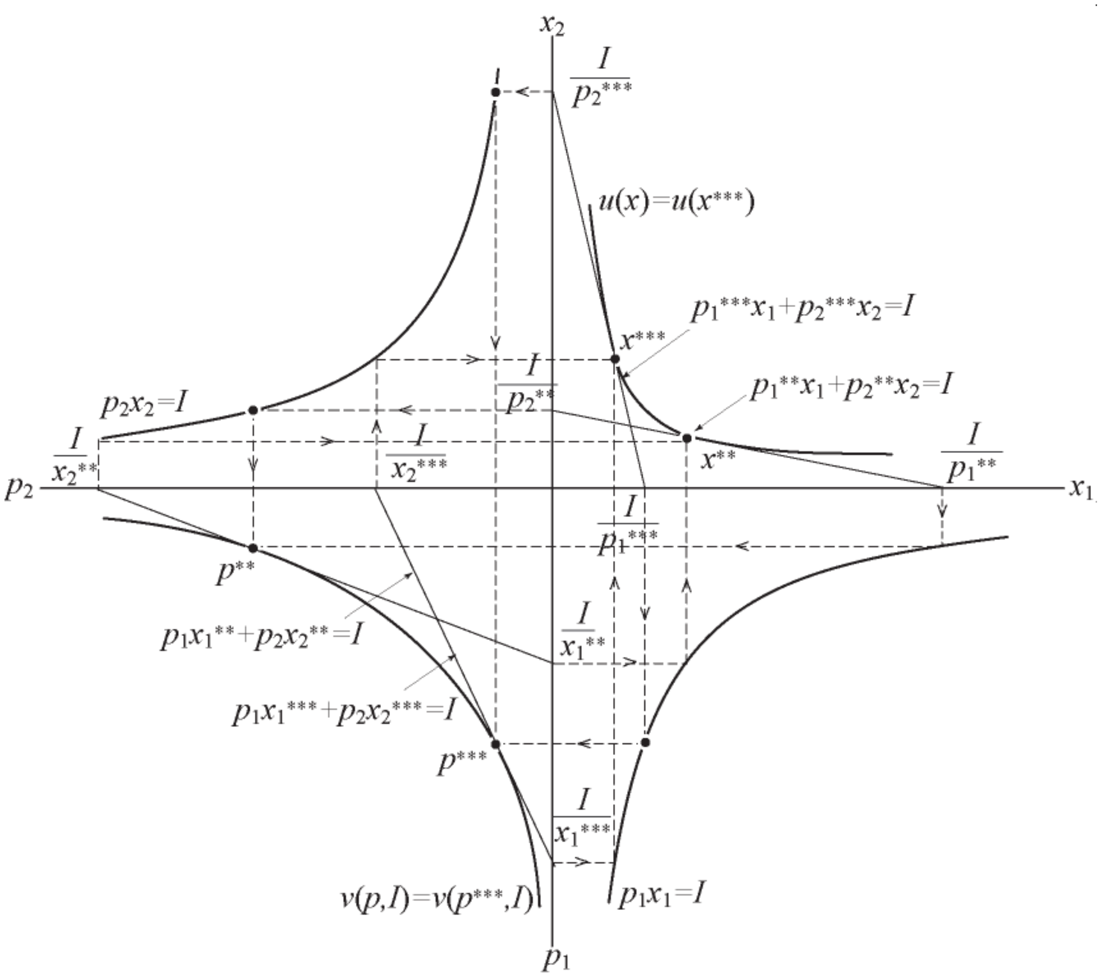

図 C.8: 無差別曲線と間接無差別曲線

接効用関数 $v(p,I)$ は p に関して準凸関数となっている。

C.5 支出最小化問題

事実 C.8(iii) より、局所的非飽和な選好の下では、間接効用関数 $v(p,I)$ は I の強い意味での増加関数であるから、所与の効用水準に対応する所得水準を $v(\cdot)$ の逆関数として表すことができる。これは「支出関数 $e(p,u)$ − expenditure function」と呼ばれ、以下の支出最小化問題− expenditure minimizaiton problem

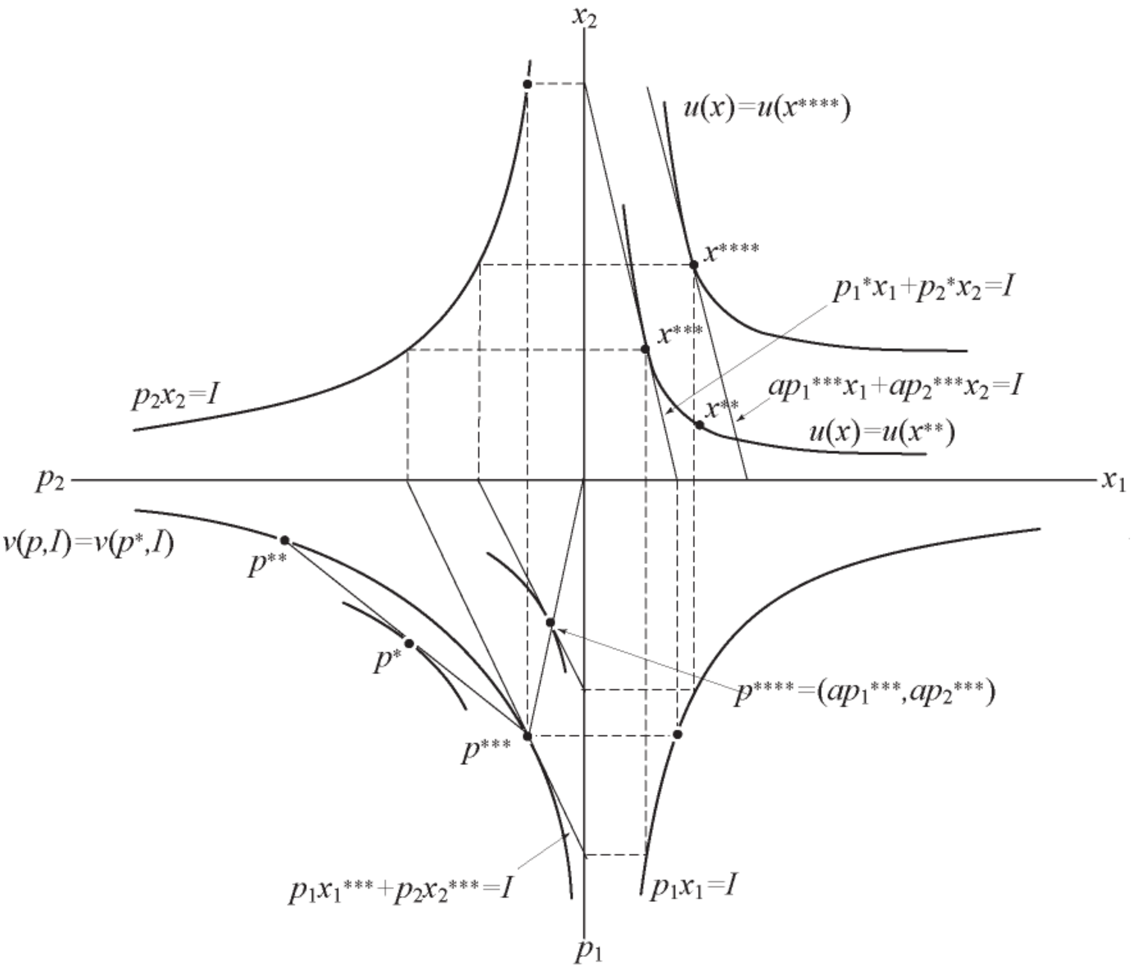

図 C.9: 間接効用関数の準凸性

（ＥＭＰ）－によっても定義できる。

$$e(p,u) \equiv \min_{x\in\mathbf{X}} p\cdot x \tag{C.16}$$
$$s.t. \quad u(x) \geq u$$

支出関数は、第Ｂ.3 節における生産者の費用最小化問題と完全に対応しており、(C.16）の双対問題は以下のように書ける。

$$\max_{p\gg 0} e(p,u) \tag{C.17}$$
$$s.t. \quad p\cdot x \leq \bar{e}$$

効用関数 $u:\mathbf{X}\to R$ が、$\mathbf{X}$ 上で定義された局所的非飽和な選好関係 $\succsim$ を表す連続関数である場合について、支出関数は以下のような性質を持つ[14]。

事実 C.9 (支出関数の効用水準に関する増加性) [15]$u' > u \Rightarrow e(p,u') > e(p,u)$

事実 C.10 (価格に関する非減少性) $p' \geq p \Rightarrow e(p',u) > e(p,u)$

事実 C.11 (価格に関する１次同次性) 任意の $t>0$ について $e(tp,u) = te(p,u)$

事実 C.12 (価格に関する凹性) $e(p,u)$ は p についての凹関数である。

事実 C.13 (価格に関する連続性) $e(p,u)$ は $p>0$ において p の連続関数である。

定義 C.13 (補償需要関数－ compensated demand function) [16]支出最小化問題 $(C.16)$ の最適解を補償需要関数 $h(p,u)$ と呼ぶ。

事実 C.14 (シェパードの補題) 支出関数が $p\gg 0$ において微分可能であれば

$$h_i(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}, \quad i=1,\ldots,m \tag{C.18}$$

が成り立つ。

事実 C.15 (補償需要関数の性質) [17]効用関数 $u:\mathbf{X}\to R$ が、$\mathbf{X}$ 上で定義された局所的非飽和な選好関係 $\succeq$ を表す連続関数で、$h(\cdot,u)$ が２階連続微分可能であるとき、任意の $p\gg 0$ について、$h(p,u)$ は以下の性質を持つ。

(i) 価格についてゼロ次同次である (従って、オイラーの定理より $D_p h(p,u)\cdot p = 0$)。

(ii) 対称な半負値定符号行列である。特に、任意の i について $\frac{\partial}{\partial p_i}h_i(p,u) \leq 0$、任意の i,j について $\frac{\partial}{\partial p_i}h_j(p,u) = \frac{\partial}{\partial p_j}h_i(p,u)$、さらに、補償需要の法則－ *law of compensated demand* －が成立する : $dp\cdot dh = dp\cdot Dh(p,u)dp \leq 0$。

事実 C.16 (補償需要の凸性) 選好関係が凸 (つまり効用関数が準凹関数) ならば $h(p,u)$ は凸集合であり、さらに選好関係が強い意味の凸 (効用関数が強い意味の準凹) ならば１要素からなる。

最後に、第 C.4 節の効用最大化問題と本節の支出最大化問題の双対関係は以下のようにまとめられる。

[14]支出関数は、生産における費用関数と基本的に同じ性質を持つため証明は省く。
[15]選好の局所非飽和性により、無差別曲線が幅を持たないことによる。
[16]または、ヒックスの需要関数－ hicksian demand function。
[17]基本的に生産における制約付要素需要関数と同様の性質を持つ（事実 B.23 参照)。

事実 C.17 (効用最大化問題と支出最小化問題の双対性) [18]連続な効用関数 $u(\cdot)$ は、消費可能集合 $\mathbf{X}$ 上で定義された局所非飽和な選好関係 $\succsim$ を表すとする。このとき、価格 $p \gg 0$ について、効用最大化問題（UMP）と支出最大化問題（EMP）の間に、以下の双対関係が成立する。

(i) 所得 $I > 0$ の下で、x^* が *UMP* の最適解ならば、x^* は効用水準 $u(x^*)$ を所与としたときの *EMP* の最適解であり、そのときの最小化費用は I である。

(ii) 所与の効用水準 $u > u(0)$ の下で、x^* が *EMP* の最適解ならば、x^* は所得が $p \cdot x^*$ の下での *UMP* の最適解であり、そのときの最大化効用水準は u である。

C.6 ロワの恒等式

事実 C.18 (ロワの恒等式－ Roy's identity) [19]効用関数 $u : \mathbf{X} \to R$ が、$\mathbf{X}$ 上で定義された局所的非飽和な選好関係 $\succsim$ を表す連続関数であり、間接効用関数 $v(p, I)$ が $(\overline{p}, \overline{I}) \gg 0$ において微分可能であるとき、全ての財 $i = 1, \ldots, m$ について以下の恒等式が成立する。

$$x_i(\overline{p}, \overline{I}) = -\frac{\frac{\partial v(\overline{p}, \overline{I})}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(\overline{p}, \overline{I})}{\partial I}} \tag{C.19}$$

幾何学的解釈. [20]以下では、消費財が 2 種類の場合について、ロアの恒等式を幾何学的に解説する。間接効用関数の価格と所得に関する 0 次同次性より

$$v(p_1, p_2, I) = v\left(\frac{p_1}{I}, \frac{p_2}{I}, 1\right) \equiv V\left(\frac{p_1}{I}, \frac{p_2}{I}\right) \tag{C.20}$$

が得られる。価格 p_i および所得 I に関して微分すれば、$q_i \equiv p_i/I$、$q \equiv (q_1, q_2)$ と表して

$$\frac{\partial v(p, I)}{\partial p_i} = \frac{1}{I}\frac{\partial V(q)}{\partial q_i} \tag{C.21}$$

$$\frac{\partial v(p, I)}{\partial I} = -\frac{1}{I}\sum_{j=1}^{2} q_j \frac{\partial V(q)}{\partial q_j} \tag{C.22}$$

を得る。鍵は間接効用関数の 0 次同次性であり、これにより間接効用関数の所得に関する微係数は、(C.22) のように、間接効用の所得の変化に伴う変化分をそれと同等な価格の変化として表現することが可能となる。これらをロアの恒等式（C.19）に代入すれば

$$x_i(p, I) = x_i(q, 1) = \frac{\frac{\partial V(q)}{\partial q_i}}{\sum_{j=1}^{2} q_j \frac{\partial V(q)}{\partial q_j}} \tag{C.23}$$

を得る（最初の等号は需要関数の (p, I) に関する 0 次同次性を用いている)。これらからロワの恒等式を間接無差別曲線（図 C.10）を用いて幾何学的に理解できる。第 1 財については (C.23) より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1^*} &= \frac{\overline{q}_1 \frac{\partial V(\overline{q})}{\partial q_1} + \overline{q}_2 \frac{\partial V(\overline{q})}{\partial q_2}}{\frac{\partial V(\overline{q})}{\partial q_1}} \\
&= \overline{q}_1 + \left(\overline{q}_2 \times \frac{\partial V(\overline{q})/\partial q_2}{\partial V(\overline{q})/\partial q_1}\right) \\
&= \overline{OC} + \left(\overline{OD} \times \frac{\overline{CA}}{\overline{OD}}\right) \\
&= \overline{OC} + \overline{CA} \\
&= \overline{OA}
\end{aligned} \tag{C.24}$$

を得る。 □

[18]MWG [4, pp.58-59, Prop.3.E.1]

[19]効用最大化問題の双対問題（C.15）の最適 1 階条件である。

[20]証明は MWG[4, Prop.3.G.4, p.73]。Varian[5, p.106-108] も非常に参考になる。幾何学的説明は奥野・鈴村 [8, 第 12.7 節] 参照。

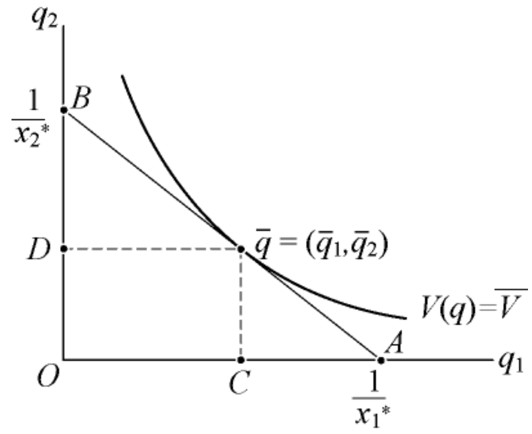

図 C.10: ロワの恒等式

C.7　スルツキー方程式－補償需要関数とマーシャルの需要関数の関係

定義 C.14 (拡張経路－ income expansion path) 価格を固定したとき、所得の変化に伴う効用最大化消費計画の軌跡を (所得) 拡張経路と呼ぶ。

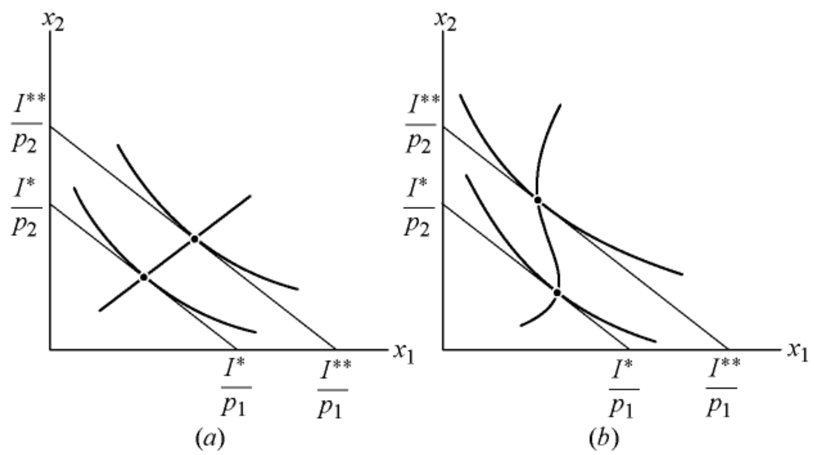

図 C.11: 拡張経路－ (a) 両財とも所得の増加に伴い需要が増加する正常財－ normal goood ; (b) 財 1 は所得の増加に伴って需要が減少する下級財－ inferior good

定義 C.15 (オファー曲線－ offer curve) 所得を固定したとき、特定 1 財の価格の変化に伴う効用最大化消費計画の軌跡をオファー曲線と呼ぶ。

事実 C.19 (スルツキー方程式-slutsky equation) [21]

$$\frac{\partial x_i(p,I)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(p,v(p,I))}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i(p,I)}{\partial I}x_j(p,I) \tag{C.25}$$

または

$$\frac{\partial h_i(p,v(p,I))}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(p,I)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,I)}{\partial I}x_j(p,I) \tag{C.26}$$

[21] 導出は MWG[4, Prop.3.G.3, p.71] または Varian[5, p.120] 参照。UMP と EMP の間の双対性を用いない方法についても確認すること（Varian[5, Sec.8.4], Henderosn and Quandt[3, Sec.2.5]）。

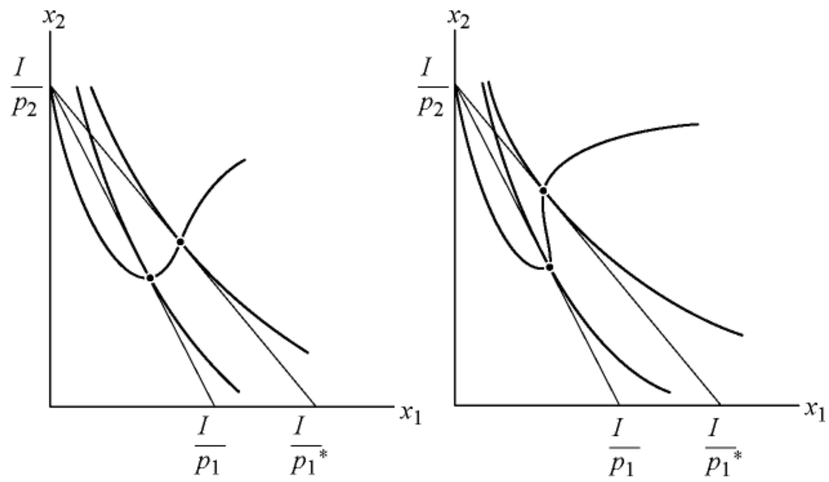

図 C.12: オファー曲線－ (a) 価格の下落に伴い需要が増加する正常財；(b) 価格の下落に伴い需要が減少するギッフェン財－ Giffen good

証明. 価格・所得ペア $(\bar{p}, \bar{I})$ において消費者は効用水準 $\bar{u}$ を得ているとする。このとき

$$\bar{I} = e(\bar{p}, \bar{u}) \tag{C.27}$$

が成立している。次に、任意の価格・効用水準ペア (p, u) について、消費財 i に対する補償需要関数とマーシャルの需要関数の間には、恒等的に

$$h_i(p, u) = x_i(p, e(p, u)) \tag{C.28}$$

が成立するため、これを p_j について偏微分して

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_i(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} &= \frac{\partial x_i(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u}))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u}))}{\partial I} \frac{\partial e(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} \qquad \text{(C.29)} \\
&= \frac{\partial x_i(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u}))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u}))}{\partial I} h_j(\bar{p}, \bar{u}) \quad [\because \text{シェパードの補題} \ (C.18)] \\
&= \frac{\partial x_i(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u}))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u}))}{\partial I} x_j(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u})) \quad [\because (C.28)] \\
&= \frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial I} x_j(\bar{p}, \bar{I})
\end{aligned}$$

□

特に式（C.26）の右辺を要素として持つ $m \times m$ 行列

$$S(p, I) = \begin{bmatrix} s_{11}(p, I) & \cdots & s_{1m}(p, I) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1}(p, I) & \cdots & s_{mm}(p, I) \end{bmatrix} \tag{C.30}$$

を、スルツキーの（代替）行列と呼ぶ。ただし

$$s_{ij}(p, I) = \frac{\partial x_i(p, I)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p, I)}{\partial I} x_j(p, I) \tag{C.31}$$

、

上の証明にて示されたように、スルツキー方程式（C.25）は、(p^*, I^*) における効用最大化解を x^*、$u^* = u(x^*)$ とすると、恒等式 $h_j(p, u^*) \equiv x_j(p, e(p, u^*))$ が成立することを用いて得られる。図 C.13 において点

x^* は (p_1^*, p_2^*, I^*) の下での最適消費計画である。今、財 1 の価格が p_1^{**} に上昇したとする。このとき、最適消費計画は x^* から x^{**} へと移るが、この効果は「代替効果-substitution effect」と「所得効果− income effect」に分解することができるというのが (C.25) のスルツキー方程式の意味するところである。「代替効果」は右辺第 1 項であり、効用水準を u^* に保ったまま相対価格の変化（$p_1^*/p_2 \to p_1^{**}/p_2$）の変化に伴う無差別曲線 $u(x) = u^*$ 上の消費計画の変化 $x^* \to x^{***}$ により表される。所得効果は、価格を一定とした予算線のシフトによる需要の変化 $x^{***} \to x^{**}$ により表される。$\frac{\partial h_i(p,v(p,I))}{\partial p_i} \leq 0$ より正常財の価格が上昇すれば、常にその財への需要は減少することが容易に確認できる。

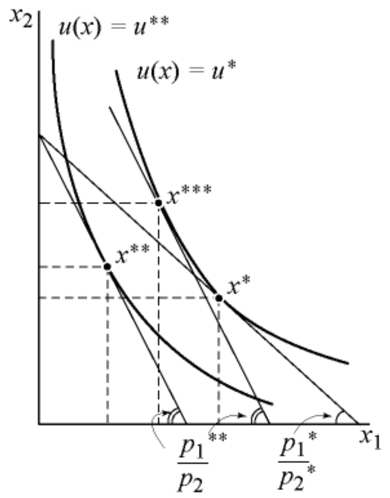

図 C.13: マーシャルの需要関数の価格効果のスルツキー分解

C.8　効用最大化問題と支出最小化問題の双対性

図 C.14 は、効用最大化問題と支出最小化問題の最適解および価値関数の関係についてまとめている。

C.9　顕示選好理論

[22] これまでは、消費者の選好関係（あるいは効用関数）から出発して、需要の理論を構築してきた。これに対して、サミュエルソンは、直接観察が不可能な選好関係ではなく、観察される市場価格と需要から消費者の選好関係を導き出す顕示選好理論を提唱した。本節では、この顕示選好理論を紹介し、合理的選好に基づく需要の理論との整合性を検討する。

顕示選好理論においては、ある価格・所得ペア (p, I) の下で、需要 $x(p, I)$ が観察されたなら、所得集合 $B(p, I)$ 内で購買できる財の組み合わせの中で、消費者は $x(p, I)$ を最も好ましく思っていると解釈する。すなわち、需要が選好を顕示していると考えるのである。顕示選好理論においては、消費者による需要の一貫性に関して以下が仮定される。

定義 C.16 (顕示選好の弱公準− Weak Axiom of Revealed preference) 任意の２つの価格･所得ペア (p, I) と (p', I') の下で、以下の条件が満たされるとき、マーシャルの需要関数 $x(p, I)$ は顕示選好の弱公準 (WA) に従うという。

$$[p \cdot x(p', I') \leq I \text{ かつ } x(p', I') \neq x(p, I)] \Rightarrow p' \cdot x(p, I) > I' \tag{C.32}$$

[22] MWG[4, Sec.2.F]・ 西村 [7, §4.3] 参照

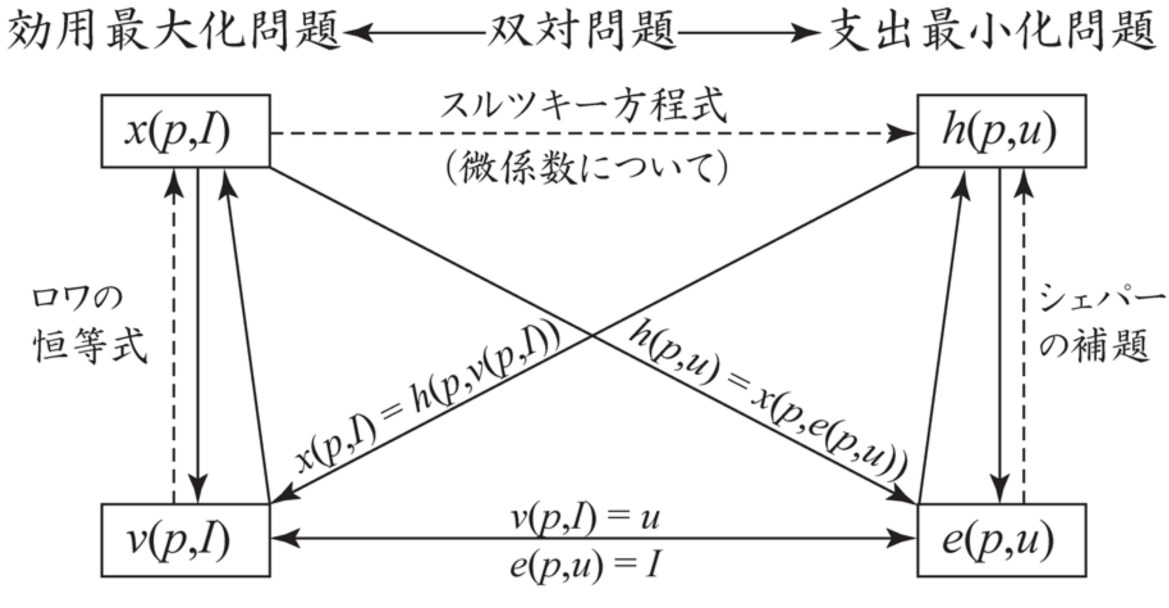

図 C.14: 効用最大化問題と費用最小化問題の関係

つまり、(p, I) の下で、$p\cdot x(p', I') \leq I$ かつ $x(p', I') \neq x(p, I)$ が成り立つとき、消費者は $x(p, I)$ と $x(p', I')$ の両方が購入可能であるにも関わらず $x(p, I)$ を選んだことから、消費者が $x(p', I')$ に対して $x(p, I)$ を選好するこが顕示されたと解釈し、$x(p, I)$ と $x(p', I')$ の両方が購入可能ならば、必ず $x(p, I)$ が選ばれるべきであると考える。従って、WA は、(p', I') の下で $x(p', I')$ が選ばれたとすれば、その価格および所得の下では $x(p, I)$ は購入不可能（$p' \cdot x(p, I) > I'$）でなくてはならないことを要求している。図 C.15(a)-(c) は WA と整合する場合、(d)(e) は整合しない場合の需要パターンが描かれている。

事実 C.20 (顕示選好の弱公準と需要法則) [23]マーシャルの需要関数 $x(p, I)$ が 0 次同次、かつ、$p\cdot x(p, I) = I$ が満たされるとき、$x(\cdot)$ が WA を満たす必要十分条件は以下で与えられる：任意の (p, I) から $(p', I') = (p', p' \cdot x(p, I))$、つまり $x(p, I)$ の購入を補償した (p, I) から (p', I') への価格・所得ペアの変化 (図 $C.16$ 参照)、の下で補償需要の法則－ *compensated law of demand*

$$(p' - p) \cdot [x(p', I') - x(p, I)] \leq 0 \tag{C.33}$$

（ただし、$x(p, I) \neq x(p', I')$ のときは強い意味での不等号）が成立する。

マーシャルの需要関数 $x(p, I)$ が微分可能であるとき、事実（C.33）は、スルツキーの代替行列（C.30）が半負値定符号を意味することが、以下のように導かれる[24]。

1. ある価格・所得ペア (p, I) について、微小な価格の変化 dp を考える。もとの価格・所得ペア (p, I) の下での消費量 $x(p, I)$ が補償されるために必要な所得の変化は

$$dI = x(p, I) \cdot dp \tag{C.34}$$

   で与えられる。

2. このような価格の変化と、それに伴う需要の変化について、事実 C.20 は、

$$dp \cdot dx \leq 0 \tag{C.35}$$

   が成立することを意味している。

[23]MWG[4, Prop.2.F.1, pp.30-31]
[24]MWG[4, pp.33-34]

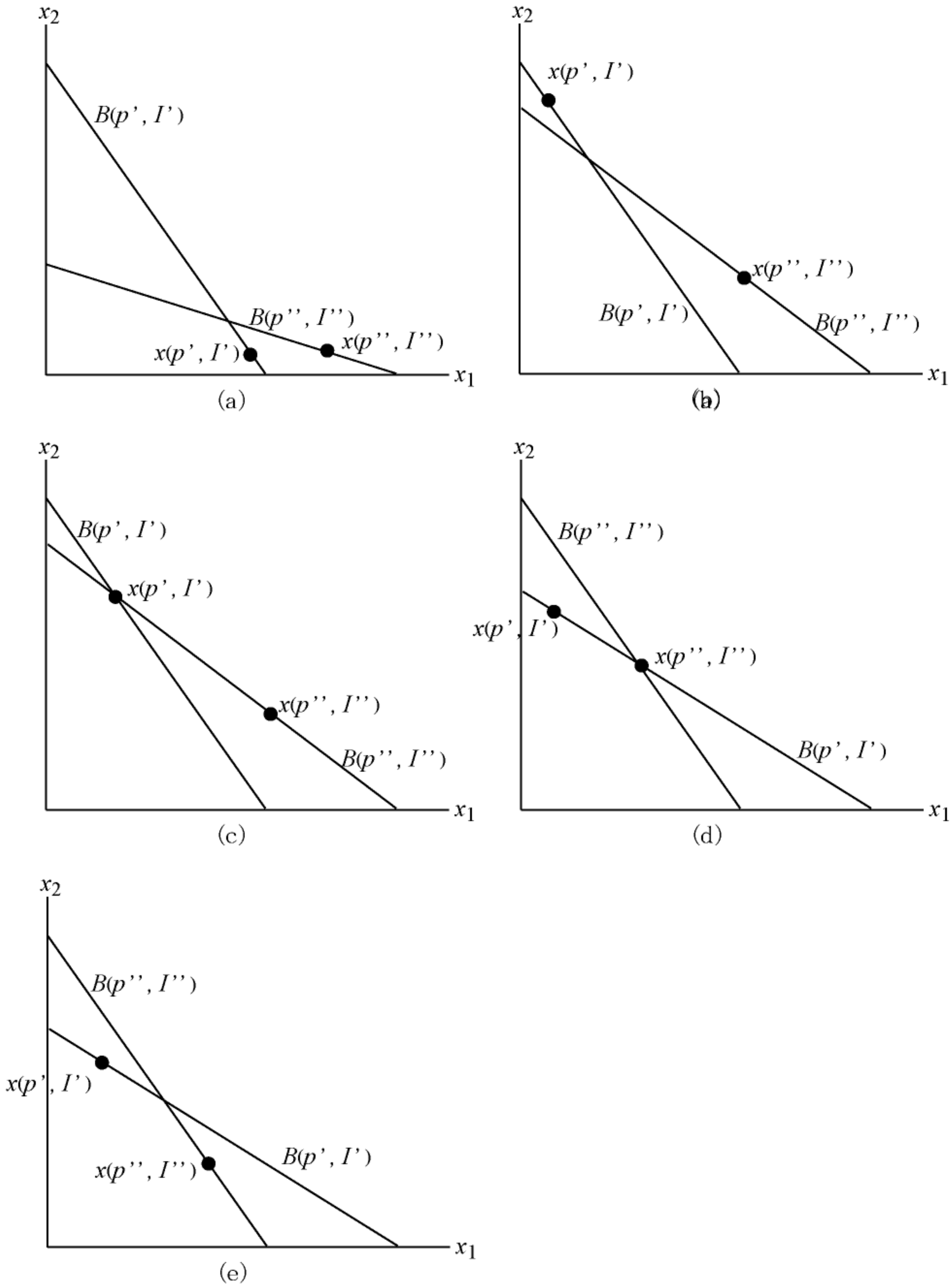

図 C.15: (a)-(c)WA を満たす需要パターン;　(d),(e)WA を満たさないパターン

3. 一方、需要の変化

$$dx = D_p x(p, I)dp + D_I x(p, I)dI \tag{C.36}$$

は、制約（C.34）の下では

$$\begin{aligned} dx &= D_p x(p, I)dp + D_I x(p, I)[x(p, I) \cdot dp] && \text{(C.37)} \\ &= \left[D_p x(p, I) + D_I x(p, I)x(p, I)^T\right] dp && \text{(C.38)} \\ &= S(p, I)dp \qquad [\because (C.30)] && \text{(C.39)} \end{aligned}$$

と表せる。

4. 式（C.39）を（C.35）に代入すれば

$$dp \cdot S(p, I)dp \leq 0 \tag{C.40}$$

を得、これは、スルツキーの代替行列が半負値定符号であることを意味する。従って、次の結果を得る。

事実 C.21 (顕示選好の弱公準とスルツキー行列) [25]微分可能なマーシャルの需要関数 $x(p, I)$ が 0 次同次、予算制約の等号成立 $p \cdot x(p, I) = I$、および WA を満たすとき、任意の (p, I) において、式 $(C.30)$ のスルツキー（代替）行列 $S(p, I)$ は半負値定符号行列である。

観察 C.1 (補償需要の価格に関するゼロ次同次性) 価格の変化分 dp が元の価格 p に比例する場合、つまり、ある $t > 0$ について、$dp = tp$ と表せる場合、$(C.34)$ より所得の補償変分は $dI = tI$ となり、予算集合は $B((1 + t)p, (1 + t)I) = B(p, I)$ で、元のものと同一である。従って、$x((1 + t)p, (1 + t)I) = x(p, I)$、つまり $dx = 0$ が成り立つ。よって $(C.39)$ より

$$S(p, I)p = 0 \tag{C.41}$$

を得る。以上より、事実 $C.21$ において、もとの価格 p に比例的な価格変化に対して、式（$C.40$)）は等号で満たされるため、$S(p, I)$ は負値定符号とはならない。事実 $C.15(i)$ 参照。

この事実を反映して、微分可能なマーシャルの需要関数 $x(p, I)$ について、WA が成立する必要十分条件は以下で与えられる。

命題 C.1 (顕示選好の弱公準の必要十分条件) [26]微分可能なマーシャルの需要関数 $x(p, I)$ が WA を満たすための必要十分条件は、$x(p, I)$ が (p, I) について 0 次同次であること、予算制約が等号で成立すること $(p \cdot x(p, I) = I)$、および、任意の (p, I) において、価格ベクトル p に比例的でない価格変化 $v \neq \alpha p($ ただし a は任意定数 $)$ に対して

$$v \cdot S(p, I)v < 0 \tag{C.42}$$

が成立することにより与えられる。

観察 C.2 (ヒックスとスルツキーの意味での所得補償とスルツキー代替行列) [27]式 $(C.39)$ にてスルツキー代替行列に至った、事実 $C.20$ における「スルツキーの所得補償− *Slutsuky wealth compensation*」では、価格変化に応じて、初期の消費量を補償するように所得を調整した。一方、事実 $C.19$ において、価格変化に応じて初期の効用水準を補償するように所得を調整する、ヒックスの意味での所得補償の下でも同じスルツキー代替行列が得られる。

[25]MWG[4, pp.33-34, Prop.2.F.2]
[26]MWG [4, p.35] 参照
[27]MWG[4, p.72]

今、初期の価格・所得ペア $(\bar{p},\bar{I})$ の下で、$\bar{x}=x(\bar{p},\bar{I})$ の消費が行われ $\bar{u}=u(\bar{x})$ の効用水準が得られているとしよう。このとき、価格が p' に変化した場合のスルツキーの意味の補償は

$$\Delta I_{Slutsky}=p'\cdot x(\bar{p},\bar{I})-\bar{I} \tag{C.43}$$

ヒックスの意味での補償は

$$\Delta I_{Hicks}=e(p',\bar{u})-\bar{I} \tag{C.44}$$

と表せる。図 $C.17$ より明らかなように、一般的には

$$\Delta I_{Slutsky}-\Delta I_{Hicks}=p'\cdot x(\bar{p},\bar{I})-e(p',\bar{u})\geq 0$$

であり

$$\Delta I_{Hicks}\leq\Delta I_{Slutsky} \tag{C.45}$$

が成り立つ。さらに、離散的な価格の変化に対しては、強い不等号が成立する。しかし、シェパードの補題 $(C.18)$、および、恒等式 $(C.38)$ より

$$D_p e(\bar{p},\bar{u})=h(\bar{p},\bar{u})=x(\bar{p},\bar{I}) \tag{C.46}$$

が成立するから、$dp\equiv p'-p$ とすると

$$\begin{aligned}
e(p',\bar{u})&=h(\bar{p},\bar{u})\cdot dp+e(\bar{p},\bar{u})\\
&=h(\bar{p},\bar{u})\cdot dp+\bar{p}\cdot h(\bar{p},\bar{u})\\
&=p'\cdot h(\bar{p},\bar{u})\\
&=p'\cdot x(\bar{p},\bar{I})
\end{aligned}$$

となり、$\Delta I_{Slutsky}=\Delta I_{Hicks}$ を得る。つまり、価格の微小変化 dp に対する、効用水準 $\bar{u}$ を保つために必要な支出額の変化は、各財の消費量を元の水準 $\bar{x}$ として価格変化に伴う「直接効果」$\bar{x}\cdot dp$ のみとなるために、二つの補償メカニズムの下で得られた代替行列が等しくなるのである。

観察 C.3 (合理的選好と顕示選好の弱公準の乖離) [28]需要が価格・所得に関する０次同次性を満たし、予算制約が等号で成立する下で、ＷＡが成立するとき、スルツキー行列は半負値定符号であるが、(財の数が２より大きい場合には）対称である必要はない。スルツキー行列の対称性は、補償需要関数の価格についての導関数の対称性を意味する。従って、この非対称性は、ある価格 p から p' への離散的な変化に伴う需要の変化が、価格変化の経路に依存することを意味し、合理的選好関係における推移性が保証されないことになる。この点が、WA から導かれる需要と、合理的選好関係から導かれる需要の違いとなる。

財の数が３以上の場合に、スルツキー代替行列の対称性を保証する条件、つまり選好関係の推移性に対応する条件として、ハウタッカーにより提唱されたのが以下の顕示選好の強公準である。

定義 C.17 (顕示選好の強公準ー Strong Axiom of revealed preference) [29]任意の価格･所得ペアのリスト

$$(p^1,I^1),\ldots,(p^N,I^N)$$

[28]MWG[4, p.73] 参照
[29]MWG[4, Def.3.J.1, p.91], 西村 [7, pp.113-114]

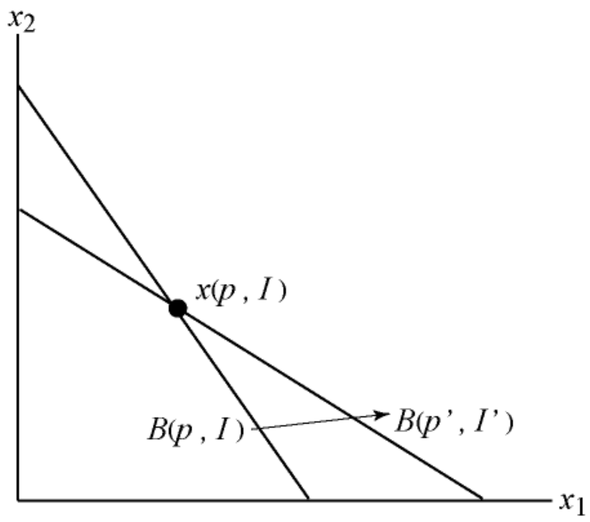

図 C.16: $x(p, I)$ の購入可能性を補償した予算集合の変化

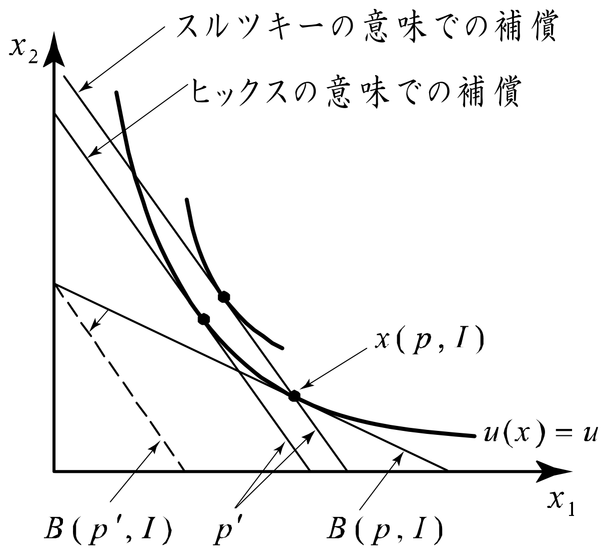

図 C.17: ヒックスとスルツキーの意味での補償

の下で、全ての $n \leq N-1$ について $x(p^n, I^n) \neq x(p^{n+1}, I^{n+1})$ となるマーシャルの需要関数が以下の条件を満たすとき、マーシャルの需要関数 $x(p, I)$ は顕示選好の強公準 (SA) に従うという。

$$\begin{aligned} p^1 \cdot x(p^1, I^1) &\geq p^1 \cdot x(p^2, I^2) \\ p^2 \cdot x(p^2, I^2) &\geq p^2 \cdot x(p^3, I^3) \\ &\vdots \\ p^{N-1} \cdot x(p^{N-1}, I^{N-1}) &\geq p^{N-1} \cdot x(p^N, I^N) \\ &\Rightarrow p^N \cdot x(p^1, I^1) > I^N \end{aligned} \tag{C.47}$$

観察 C.4 (WA と SA が要求する選好の一貫性) [30]WA・SA は、観察される需要パターンに一貫性を要求する仮定であるが、WA は観察される各需要ペアについての選好の非対称性を要求していたのに対し、SA は選好の非循環性を要求している。

SA の非循環性は、合理的選好の推移性に対応し、これはスルツキー行列の対称性を意味する。

事実 C.22 (顕示選好の強公準と合理的選好関係) [31]マーシャルの需要関数 $x(p, I)$ が、SA に従うとき、対応する合理的選好関係 $\succsim$ が存在する。つまり、この選好関係の下で、任意の価格・所得ペア (p, I) について、$x' \in B(p, I)$ かつ $x' \neq x(p, I)$ ならば、$x(p, I) \succ x'$ となる。

C.10 消費者の集計

C.10.1 Gorman 型効用関数

以下の間接効用関数型を持つ効用関数を Gorman 型効用関数と呼ぶ[32]。

$$v_i(p, I_i) = a_i(p) + b(p) I_i \tag{C.48}$$

ただし、i はある特定の消費者を表すインデックスとする。特に、所得の限界効用 $b(p)$ が全ての消費者で同じである。ロワの恒等式より、消費者 i の財 j に対する需要関数は以下で与えられる。

$$x_i^j(p, I_i) = \alpha_i^j(p) + \beta^j(p) I_i \tag{C.49}$$

ただし、

$$\alpha_i^j(p) = -\frac{\frac{\partial a_i(p)}{\partial p_j}}{b(p)} \tag{C.50}$$

$$\beta^j(p) = -\frac{\frac{\partial b(p)}{\partial p_j}}{b(p)} \tag{C.51}$$

消費者 $i = 1, \ldots, N$ の財 j に対する需要を集計すれば

$$X^j(p, I_1, \ldots, I_N) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^j(p) + \beta^j(p) \sum_{i=1}^N I_i \tag{C.52}$$

を得、所得 $\sum_{i=1}^N I_i$ を持つ代表的個人－ representative consumer の需要関数として、個々の消費者の需要関数 (C.49) と同型となる。実際、この需要関数は以下の間接効用関数からロワの恒等式を用いて導出できる。

$$v\left(p, \sum_{i=1}^N I_i\right) = \sum_{i=1}^N a_i(p) + b(p) \sum_{i=1}^N I_i \tag{C.53}$$

事実 C.23 (ホモセティック効用関数) ホモセティックな効用関数は *Gorman* 型（$v(p, I) = V(p) I$）である。

[30]西村 [7, pp.113-114]
[31]MWG[4, Prop.3.J.1, p.91]
[32]Varian[5, Sec.9.4] 参照

C.10.2　準線形効用関数

Gorman 型効用関数の特殊型として準線形効用関数－ quasi-linear utility function －があり

$$U(x_0, x_1, \ldots, x_k) = x_0 + u(x_1, \ldots, x_k) \tag{C.54}$$

で与えられる。以下で、$k = 1$ の場合について、準線形効用関数の基本的性質を導出する。財 0 を価値基準財とすると、効用最大化問題は

$$\max_{x_0, x_1} x_0 + u(x_1) \tag{C.55}$$
$$s.t. \quad x_0 + p_1 x_1 = I$$

と表せるが、予算制約式を x_0 について解き、目的関数に代入すると

$$\max_{x_1} u(x_1) + I - p_1 x_1 \tag{C.56}$$

と書け、無制約の最大化問題とすることができる。(内点解の場合の) 最適 1・2 階条件として

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1^*) = p_1 \tag{C.57}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x_1^*) \leq 0 \tag{C.58}$$

を得る（ただし、最適において内点解となるのは $u(\cdot)$ が凹関数の場合に限る）。従って、需要関数 $x_1(p_1)$ は所得に依存しない。また、(C.56) より間接効用関数は

$$v(p_1, I) = u(x_1(p_1)) + I - p_1 x_1(p_1) = V(p_1) + I$$

と表せる（ただし、$V(p_1) \equiv u(x_1(p_1)) - p_1 x_1(p_1)$）。

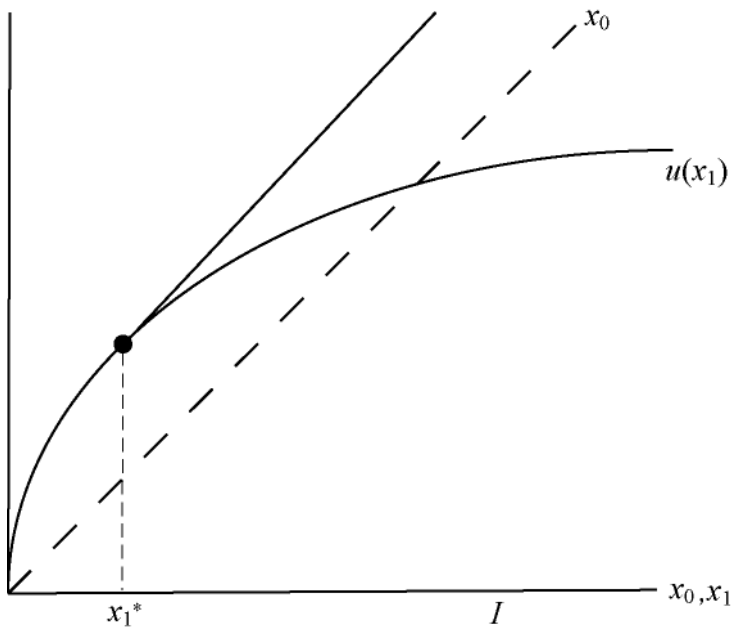

図 C.18: 準線形効用関数の最適 (内点) 解

図 C.18 を用いて、所得効果の不在の理由を考察する。図には価値基準財の (サブ) 効用関数 $u^0(x_0) = x_0$、および財 1 の（サブ) 効用関数 $u(x_1)$ を強い凹関数として描かれている。今、$\partial u(0)/\partial x_1 > 1$、かつ所得 I

が十分大きいと仮定すると、$x_1 \lesseqgtr x_1^* \Longleftrightarrow u'(x_1) \gtreqless u^{0\prime}(x_0)$ となる。議論を単純にするため $p_1 = 1$ とすれば、最適において財 1 は $\partial u(x_1^*)/\partial x_1 = p_1(= 1)$ となる x_1^*、価値基準財は $I - x_1^*$ を消費することになる。所得効果の不在は、サブ効用関数 $u(x_1)$ の凹性と「所得が十分大きい」ことを前提とした結果である。

参考文献

[1] Berge, C., *Topological Spaces*, London: Oliver&Boyd (1963) (Republication available from Dover.)

[2] Jehle, G.A., Reny, P.J., *Advanced Microeconomic Theory,* 2nd ed., Boston, MA: Addison-Wesley (2001)

[3] Henderson, J.M., Quandt, R.E., *Microeconomic Theory: A Mathematical Approach*, 3rd ed., New York: McGraw-Hill (1980)

[4] Mas-Colell, A., Whinston, M.D., Green, J.R., *Microeconomic Theory*, Oxford: Oxford University Press (1995)

[5] Varian, H.R., *Microeconomic Analysis*, 3rd ed., New York: Norton (1992)

[6] Varian, H.R., *Microeconomic Analysis*, 2nd ed., New York: Norton (1984)

[7] 西村和雄, 「ミクロ経済学」, 東洋経済（1990)

[8] 奥野正寛・鈴村興太郎, 「ミクロ経済学 I」, 岩波書店（1985)

[9] Takayama, A., *Mathematical Economics*, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press (1985)

[10] 宇沢弘文, 「経済解析：基礎編」, 岩波書店（1990）